

М.В. ПОПОВИЧ

ЛОГІКА
І НАУКОВЕ
ПІЗНАННЯ



Доктор філософських наук
М. В. ПОПОВИЧ

ЛОГІКА
І НАУКОВЕ
ПІЗНАННЯ

ВИДАВНИЦТВО
«НАУКОВА ДУМКА»
Київ — 1971

У цій книзі йдеться про труднощі, які доводиться переборювати науковому мисленню, коли воно виривається за межі нашого буденного досвіду, за межі безпосередньо спостережуваного — в мікросвіт, у простори Космосу... Як людське мислення, людська логіка долають перешкоди, що виникають на шляху наукового пізнання в міру поглиблення наших знань про дійсність? Про це ви дізнаєтесь з брошури. Тут же подано стислий виклад основних ідей і методів сучасної формальної логіки.

Написане живо, з залученням цікавих фактів і прикладів, видання призначене для широкого кола читачів.

Редакція науково-популярної літератури
Завідуючий редакцією А. Є. Денщикова

ЛОГІКА НАУКИ ЧИ НАУКА ЛОГІКИ?

(Замість передмови)

Логіка науки чи наука логіки? На це питання хотілося б відповісти так: «Врешті-решт це повинно бути одним і тим самим». Логіка не може бути чимось іншим, ніж строго науковою дисципліною. Та треба пам'ятати, що кожна галузь знання може претендувати на високе ім'я науки тільки у тому випадку, якщо вона продемонструє логічність, спроможність побудувати і виразити свій зміст із врахуванням досягнень сучасної логіки. Недарма В. І. Ленін зупинив увагу на думці Гегеля, що всяка наука — прикладна логіка. Це означає не тільки, що наука виражає результати пізнання у поняттях, але й що вона має можливість створити свій метод прирощення знання.

Інтерес до науки та її логічного аналізу в останній час значно підвищився. Що вона несе людству — безмежну здатність до пізнання і оволодіння законами природи і суспільного буття чи реальну загрозу самому існуванню життя на Землі? — ці питання хвилюють всіх.

Звідси й соціальна проблема величезного значення: спрямувати науково-технічну революцію на благо цивілізації, навчитися керувати поступом наукової думки.

Для цього слід науково-технічну революцію поєднати з перебудовою світу на соціалістичних засадах.

При усвідомленні наслідків науково-технічної революції постає ряд і більш часткових, не таких «загальнолюдських», а професіональних проблем, пов'язаних із організацією і керівництвом наукою, з постановкою наукових досліджень, прогнозуванням тощо. У зв'язку з цим сама наука стала об'єктом пильного наукового аналізу; йдеться навіть про створення спеціальної науки про науку — наукознавства.

Безперечно, що аналіз науки — нагальна потреба часу. Глибоке дослідження такого складного об'єкту, як наука, приведе до удосконалення методів найрізноманітніших галузей знання: історії та економіки, психології та правознавства тощо. Можливо, виникнуть нові дисципліни, що будуть спеціалізуватися на вивченні різних сторін науки — соціальних і гносеологічних. І з цієї точки зору ми обов'язково повинні звернутися до філософії, до її аналізу науки.

Який зміст вкладають у слово «наука»? В одних це відразу викликає уявлення про людей і установи, котрі займаються науковою діяльністю. У других — про кошти, що їх сучасне суспільство асигнує на розвиток науки. Та для філософів «наука» — це система знання, що має певний предмет і метод його пізнання. Тут ми вступаємо у галузь філософського, або, точніше, логіко-гносеологічного, підходу до вивчення науки.

Знання виступило як об'єкт філософської рефлексії ще в давнину. Так виникла логіка — вчення про мислення, що пізнає світ. Від часів Арістотеля філософія та її частина — логіка, проникаючи у суть мислення, не могла пройти повз мови — безпосередньої реальності думки. Арістотель був одним із перших філософів,

котрий взяв мову за вихідний момент в аналізі мислення.

І справді, на поверхні мислення виступає як речення. Тому для Арістотеля судження — це висловлення, яке стверджує або заперечує щось про що-небудь. Судження складається з термінів, а категорії — це вищі роди висловлювань.

Арістотель великий не тільки тим, що пов'язав аналіз мислення з мовою; не менш важливе, що він ніколи не забував про віднесеність висловлювань, слів і речень до об'єктивної реальності, до світу речей та явищ. При чому пізнання (за Арістотелем) завжди провадить розшуки у чотирьох напрямках: «Що (річ) є (така), чому (вона) є, чи є (вона) і що (вона) є».

Найвидатніші мислителі продовжували традицію Арістотеля — дослідження зв'язку мови й мислення. Філософська і логічна думка рухались у цьому напрямку, долаючи хибні, односторонні концепції, які абсолютизували окремі моменти складних взаємовідносин мови і мислення.

Від Арістотеля до сьогодення минуло багато часу, істотно змінилося знання, його логіка і мова. Нині існує багато логік і, очевидно, кількість їх ще буде зростати. Незважаючи на це, можна дати загальне визначення кола проблем, що їх розв'язує логіка: вивчення структури, засобів доказу, виникнення і розвитку наукової теорії. Які б не існували логіки, вони обов'язково мають відношення саме до цих проблем.

Історія науки свідчить, що пізнання у своїх вирішальних поворотах, пов'язаних з фундаментальними відкриттями, завжди вимушено було переходити межу раніше логічно припустимого, створювати нові форми і правила мислення.

Щоб переконатися в істинності цього, досить звернутися до історії логіки. Людський розум перетворив закони і форми мислення, розкриті та описані Арістотелем, у норму мислення. Історія логіки нового часу сповнена спроб обґрунтувати необхідність виходу за межі встановлених норм. Цей процес йшов у самих різних напрямках і з різних боків: доводилось, що закони Арістотелевої логіки, зокрема закон виключеного третього, діють не в усякому процесі міркування; форми, описані нею, не охоплюють всю різноманітність висновків, а сама логіка Арістотеля не розкриває всіх законів і форм. поступу мислення до нових результатів. Тому сфера, яка підлягає логічному вивченню, була розширена, виникло багато логічних систем, кожна з них аналізує закони і форми правильного мислення. А оскільки знання неперервно росли, змінюючись якісно і кількісно, сфера логічного збагачувалась новим змістом, вона включала нові елементи, внутрішньо перетворюючись і перебудовуючись.

Добре відомо, що наукове знання — складне і багатостороннє. Чи все воно служить об'єктом логічного? Деякі міркують, що у сферу логіки входить лише один бік знання: аналіз структури, будова такого її утворення, як вивід, суть якого полягає у переході від заданого, відомого знання до іншого, що слідує з нього з логічною необхідністю або ймовірністю певного степеня. У такому випадку з наукового знання береться тільки один його елемент і вивчається зі строго визначеного боку.

Не можна заперечувати важливість цього елемента для наукового знання, бо останнє неможливе без процесу виведення. Детальний аналіз вивідного знання завжди входив у сферу логіки, і на цьому шляху вона досягла великих успіхів.

Але виникає питання: чи охоплює процес виведення все, з чим пов'язано розвиток наукового знання? Процес виведення припускає, що певне знання нам вже дано і треба знайти засоби для виведення з нього ще деяких положень. Однак наше знання розвивається не тільки в такий спосіб, воно включає висування нових положень на основі узагальнення практичного досвіду. екстраполяції колишніх теоретичних принципів, що не укладаються в межі логічної дедукиції.

Тому здавна існує традиція розширення сфери логічного за рахунок вивчення законів і форм руху мислення до нових результатів, незалежно від того, як ми до них йдемо: шляхом дедукиції чи шляхом екстраполяції.

Нерідко можна почути таке заперечення: процес народження нового знання не вкладається в межі логіки, оскільки цей процес пов'язаний з діяльністю окремих вчених, в кожного з котрих є індивідуальні особливості, власне життя, своя інтуїція. Відкидати вплив особистості на наукову творчість неможливо, але її абсолютизувати його не слід. Вплив особистості на творчий процес у науці знаходиться в рамках раціонального, а все раціональне підлягає логічному аналізу і в деякій мірі може бути виражено у певних формах мислення. Навіть вплив випадкових факторів не робить процес мислення, що приводить до нових результатів, ірраціональним. Сучасна наука не боїться випадковостей і шукає в них закономірність. Логіка не повинна бути виключенням.

В аналізі знання велика роль належить формальній логіці в її сучасній формі. Але одного лише апарата формальної логіки, який би він не був розвинений і досконалий, недостатньо для аналізу знання. Людське мислення завжди відчуває брак нових понять, що роз-

ширюють його можливості. Правда, виходячи за межі існуючих понять і схем, думка в остаточному підсумку знову потрапляє в них, бо вона створює нові поняття, новий апарат; мислення, яким би вільним воно не було, детермінується категоріями, але останні припускають великий вибір у рішенні проблем, не жорстко, а у деякій мірі вільно спрямовують творчу думку. У цьому, зокрема, ми вбачаємо евристичну роль філософських категорій у сучасному науковому пізнанні.

Історія науки показує, що філософський метод кожної епохи виникає внаслідок усвідомлення створеної наукової картини світу для теоретичних і практичних потреб людини. Органон Арістотеля, методи пізнання Декарта і Бекона, гегелівська діалектика — всі вони виникли на основі тогочасної картини світу.

Матеріалістична діалектика як філософський метод на відміну від інших філософських систем не буде універсальною картини світу. У теперішній час така картина створюється самими науками. А з сукупного досвіду пізнання та практики діалектика виводить свої категорії. У системі категорій діалектичного матеріалізму усвідомлюються не тільки результати пізнання і практики, але й людські прагнення в майбутнє, тому воно і виступає як загальний метод наукового пізнання.

У Радянському Союзі провадяться різноманітні дослідження з логічного аналізу науки. Серед дослідників логіки науки особливе місце займає група логіків з Інституту філософії АН УРСР. Спрямування їх досліджень можна охарактеризувати як синтетичне. Українські вчені приділяють велике значення розвитку й удосконаленню апарата сучасної логіки, усвідомленню логічних основ наукового знання, аналізу його фундаментальних основ, ставлять питання про логічний спосіб дослідження наукової творчості. Їх credo: вивчати всі

складні проблеми логіки сучасної науки, завжди маючи на увазі основну мету філософів-марксистів — удосконалення методу науково-теоретичного мислення, наближення його до потреб наукового пізнання.

Одним з яскравих представників української школи логіків є доктор філософських наук М. В. Попович. Читач знайде в його книзі висвітлення складних логічних проблем, аналіз сучасної логіки у тісному зв'язку з тими процесами в науці, свідками яких ми є. Тут логіка науки подана як дійсно марксистсько-ленінська наука логіки, викладена у популярній формі в найліпшому розумінні виразу.

Член-кореспондент АН СРСР, академік АН УРСР П. В. КОПНІН

НАУКА ШУКАЄ НАДІЙНИХ ФОРТЕЦЬ

СПРОБУЙМО СОБІ УЯВИТИ

Знайомство з цією книжкою читач почне з прикладів, які йому, можливо, не лише знайомі, але й набридли. Протягом останніх десятиріч написано безліч науково-популярних статей, брошур і науково-фантастичних оповідань про час, що уповільнюється при субсвітлових швидкостях; про електрон, який «сам» собі обирає орбіту; про замкнений Всесвіт, його «вибух» і розширення тощо. І все ж почнемо саме з цього — з фундаментальних питань природознавства.

Припустимо, що зустрілися два космічні кораблі А і В. Один повертається на Землю, другий тільки-но розпочав мандрівку по Галактиці. Обидва побудовані за одними й тими ж кресленнями, вони мали на Землі однакові параметри. На кораблі А встигли виміряти довжину корабля В і виявили, що він став коротший, ніж А. На кораблі В теж визначили довжину корабля А і встановили, що він став коротший за В... Нікого з космонавтів це не здивувало, бо теоретично такий ефект передбачено ще в 1905 році А. Ейнштейном у спеціальній теорії відносності.

А чи можете ви, любий читачу, уявити собі реальне скорочення розмірів? Релятивістські ефекти підтвер-

джуються і навіть спостерігаються. Так, за теоретичними розрахунками, які перевірені експериментами, час при дуже великих швидкостях настільки уповільнює свій плив, що короткоживучі мікрочастинки уповільнюються процес саморозпаду в десятки тисяч разів. Але, власне кажучи, ніякого «уповільнення часу» ми не спостерігаємо: ми констатуємо, що одні — повільні — мікрочастинки «живуть» набагато менше, ніж інші — швидкі, тобто «існують» різний час (наш, зрозуміло, «людський», земний час). Говорячи «уповільнення часу», ми кажемо про уповільнення процесів у тому ж таки «людському» часі.

Космологічні гіпотези, побудовані на основі загальної теорії відносності, заводять ще далі в хаші абстракцій. Та щоб пояснити, як це Всесвіт може бути конечний, але не обмежений границями, нам пропонують інколи конкретні образи — наприклад, порівняння з так званим Мебіусовим листком (односторонньою поверхнею). І зовсім неважко уявити собі вузьку смужку паперу, перекручену і склеєну так, що, рухаючись по її зовнішній поверхні, ми непомітно для себе потрапляємо на внутрішню, йдемо далі, нічим не обмежені, але описуємо конечну, замкнуту фігуру... Та всі наочні образи неевклідових просторів мають істотний недолік: ми вміщуємо їх в звичному для нас просторі; і нелегко зрозуміти, чому лінію, яку ми звикли вважати прямою, забороняється вважати прямою, а прямою називають те, що ми сприймаємо як криву.

Уявимо собі, що електрон — це маленька кулька, якою ми обстрілюємо мішень, поставлену за екраном з вузькою щілиною. Електрони, пройшовши крізь щілину, кожного разу відхиляються трохи вбік і влучають у мішень за певною закономірністю: попадання в одні місця більш імовірні, ніж в інші.

Спалахи на мішені можна сфотографувати. Здавалося б, картина не повинна відрізнятись від тієї, котру одержимо, якщо обстрілювати звичайну мішень із звичайної зброї: адже при найсприятливіших умовах внаслідок різних причин куля завжди відхиляється від теоретично визначеної траєкторії польоту і мішень буде «подзьобана» в різних місцях. Але ситуація з електроном, описувана квантовою механікою, докорінно інша: електрон — за ідеальних умов, без причин у класичному розумінні слова в силу своєї власної природи відхиляється від «точного» шляху. Теорія передбачає лише ймовірність спалаху в тій чи іншій точці екрана; більше того, вона заперечує можливість польоту по ідеальній з точки зору класичної механіки траєкторії при точно визначеному (знову ж таки з точки зору класичної механіки!) імпульсі.

Усі ці положення суперечать звичним уявленням про навколишню дійсність настільки різуче, що прийняття нових ідей стало свого часу дуже болісним процесом. Зрештою, колись важко було уявити, що Земля кругла: думка про те, що «під нами», на протилежній стороні земної кулі, люди ходять «догори ногами», наче мухи по стелі, здавалася надзвичайно кумедною. Тепер це нікого не дивує.

Американський фізик Ф. Дайсон, спираючись на досвід викладання і власного вивчення квантової механіки, так описує «звикання» до неї. Спочатку студент вчиться робити обрахунки і одержувати вірні результати, засвоює математичні прийоми. Потім він починає страждати від того, що він не уявляє собі ясної фізичної картини світу. Нарешті несподівано настає період, коли студент каже самому собі: «я розумію квантову механіку» або, швидше, «я тепер зрозумів, що тут нічого особливо розуміти». «Справа в тому, —

пише Дайсон, — що він навчився думати безпосередньо і несвідомо мовою квантової механіки і більше не намагається пояснювати все за допомогою доквантово-механічних понять»¹.

Але ж з антиподами справа зовсім інша. Ми звикли уявляти собі, що голови жителів Екватору і жителів острова Суматра спрямовані в протилежні сторони. Але ніяких наочних образів, що відповідали б сучасній фізиці, ми не створили. Вірніше, ми можемо уявити собі окремі сторони картини, намальованої теорією, але зводячи їх до купи, одержуємо якусь незрозумілу мозаїку, суперечливу з «буденної» точки зору.

Порівняно неважко навчити студента оперувати математичним апаратом сучасної фізики, розраховувати, яким буде результат експерименту. Але відповіді на питання про те, яку фізичну картину світу дає теорія, «парадоксальна» з точки зору звичайного сприйняття навколишнього світу, важко і найвизначнішим фізикам-теоретикам.

Наприкінці п'ятдесятих років знову почали жваво обговорюватись парадокси скорочення стрижнів і уповільнення ходи годинників у зв'язку з перспективами космічних польотів. Один відомий англійський фізик жартома так характеризував ці дискусії Д. В. Скобельцину: «Моїх розумових здібностей недостатньо, щоб у всьому цьому розібратися»².

На всіх етапах розвитку науки можна, звичайно, знайти багато «парадоксального». Власне кажучи, класична механіка, попередниця фізичних ідей ХХ ст, базується зовсім не на таких вже простих і наочних

¹ Ф. Дайсон. Новаторство в фізиці — У зб.: Над чим думают физики, вып. 2. (Элементарные частицы). М., 1963, стор. 94.

² Д. В. Скобельцин. Парадокс близнецов в теории относительности. М., 1966, стор. 5.

уявленнях. Досить «штучний», «неприродний» характер вихідних ідей ньютонівської механіки часто демонструють перед тим, як починати виклад релятивістської або квантової механіки. І правда, зовсім нелегко за- своїти поняття про «абсолютний простір», відокремлений від речей, чи «абсолютний час», відділений від подій: «засніжений простір» — не що інше, як ділянка землі, вкрита снігом, а «час великих подій» — це сукупність подій, а не щось таке, що плине незалежно від них... Закони механіки, строго кажучи, формулюються для точок або їх сукупностей («геометричних місць точок»), а точку уявити собі не легше, ніж «парадоксальні» властивості електрона, якщо не ототожнювати її з малесенькою чорнильною плямою на папері. В класичній механіці ми припускаємо, що можна фіксувати нескінченно малі інтервали простору і часу, що положенням тіла в даній момент причинно зумовлене положенням його в певний нескінченно близький момент часу. Хоч ми інколи говоримо, що «наш» простір — евклідовий, це зовсім не так: евклідовий простір — таке ж математичне поняття, як і неевклідовий.

І все ж...

І все ж, хоча й далекі абстракції класичної механіки та евклідової геометрії від наочних уявлень, зорових образів, ці теорії прекрасно пояснюють саме поведінку предметів, що нас безпосередньо оточують. Вірніше, ми завжди можемо уявити собі з великим огрубленням «звичайні» предмети, які можна зіставити з математичними абстракціями даних теорій. Саме таких наочних еквівалентів не допускають найабстрактніші теоретичні побудови нашого сторіччя.

Що б не казали про абсолютний простір і абсолютний час, але в них зручно було жити, зручно було розташовувати звичайні речі!

Не будемо зараз торкатися філософських дискусій про зв'язок простору і часу з рухомою матерією, про те, чи є якісь причини у дивовижній поведінки електрона. про те, чи конечний Всесвіт або безконечний... Констатуємо лише один факт: якщо ми хочемо дотримуватися науковості, не слід починати зі слів «уявимо собі». Уявити швидкості, близькі до швидкості світла, ми не можемо — наше око не помічає вже спиць у велосипедному колесі, яке рухається. Уявити електрон ми можемо лише у вигляді якоїсь «кульки» або «хвилі» (причому хвилі чогось), а це невірно. І так далі, і так далі. «Уявити» — значить «побачити в уяві», все ж побачити. Прості міркування підказують, що ми не можемо бачити інфрачервоного та ультрафіолетового кольорів — світлові хвилі відповідної довжини не сприймаються людським оком. Очевидно, поза можливостями зору і наочної уяви перебувають і явища, описувані сучасною фізикою.

ЧОГО МИ НЕ ПОБАЧИМО

Та чи справді обмежені можливості людського зору? Хіба не побачили люди світ зовсім іншим десь у XVII ст. після винайдення мікроскопа? Сучасні мікроскопи дають збільшення у тисячу, а електронні мікроскопи — в десятки тисяч разів. Чи не посміється технічний прогрес над песимістичними пророкуваннями вже у найближчі десятиріччя? Хіба, нарешті, не фотографуємо ми елементарних часток, їх зіткнення і розпади?

Та йдеться не про принципові границі розвитку оптичної техніки, а про принципові границі можливостей людських органів чуттів.

Людське око сприймає світлові хвилі довжиною приблизно від 400 до 800 мкм. Для того щоб зафіксу-

вати ультрафіолетові хвилі, не треба навіть будувати спеціальних приладів — наша власна шкіра вкривається загаром і таким чином реагує на хвилі, коротші за 400 нм. Але ультрафіолетові хвилі не мають кольору, не мають «вигляду». Ми бачимо лише наслідок їх дії.

Людина розрізняє предмети навіть у освітленні в мільярд разів слабшому, ніж у сонячний день. Та спробуйте відповісти на питання: який вигляд має предмет — ну, не в абсолютній темряві, а при освітленні, в мільярд мільярдів разів слабшому за ясний сонячний день?

Це питання безглузде. Предмет не може мати вигляду «взагалі» при будь-якому освітленні чи без нього, «незалежно від людського ока», «не такий, який ми його бачимо, а такий, який він є сам по собі». «Мати вигляд» — це значить бути даним людині при певних обставинах, визначених як властивостями самого предмета, так і біологічними особливостями людини і умовами її життя.

Чи молекула води мокра? Це питання абсурдне. «Мокрий» — характеристика взаємодії з людиною великого агрегату молекул.

Який вигляд має елементарна частинка? Це питання точнісінько таке ж безглузде. «Вигляд» — це характеристика взаємодії з людиною безлічі фотонів. Окремий фотон не має вигляду.

Стіл або стілець мають вигляд, а квант світла, елементарна частинка не мають вигляду. Отже, цілком правий фізик, що вмістив схему будови атома, попередивши у підписі під нею: пам'ятайте, наведена схема не має нічого спільного з тим, що є насправді. Може, слова «не має нічого спільного» надто сильні: щось спільне все ж таки є. Але різниця між намальованим столом і схемою атома величезна.

Щодо фотографій елементарних частинок, то не варто забувати, що це — фотографії крапельок туману, утворених парою етилового спирту та води у камері, заповненій аргоном, пухирців у камері з рідким пропаном тощо, тобто слідів частинки, а не її самої.

Не будьмо наївні. Не слід забувати, що ми не боги, а люди, які населяють планету, загублену на периферії однієї з Галактик.

Дещо песимістично? Скоріше, навпаки. Думка людини набагато випередила її фізичну організацію. Ми бачимо і уявляємо ту частину Всесвіту, з якою спілкуємося безпосередньо як живі істоти, як тварини. Та людина вирвалася в такі області пізнання, де втратила безпосередній контакт із досліджуваними об'єктами. І хоч вона стала «сліпою і глухою», та мозок, всемогутне людське мислення, знаходить розв'язання нових і нових проблем.

Звичайно, мислення, найточніші математичні розрахунки мають твердо обґрунтовуватися спостереженнями, експериментальними даними. Факт був і залишився повітрям ученого, а факт все-таки ми констатуємо за допомогою відчуттів. Розвиток математичних методів у природознавстві та суспільних науках не лише звільняє від необхідності перевіряти обрахунки на абсолютно зримому матеріалі — він змушує будувати все громіздкішу, тоншу, дорожчу експериментальну техніку. За зовнішнім виглядом знаряддя експерименту і спостереження, що оточують сучасного фізика-експериментатора, дуже відрізняються від тих досить примітивних приладів, з якими починав вивчення атома Резерфорд, — але все це цілком «буденні», «звичайні» спостережувані речі, і без них зависають у порожнечі високі наукові абстракції.

Більш того. Сучасний теоретик, як і мислитель гли-

бокої давнини, не може обходитись без конкретних чуттєвих уявлень, навіть якщо він має справу з «чистою» математикою. Очевидно, так уже влаштована наша голова, що без допомоги образів — найчастіше, але не завше зорових — не може зрушитися з місця абстрактне мислення. Однак це вже проблеми, пов'язані з психологією творчості. Наочність лишається костуром, без якого нам незручно рухатись у теорії. Але вірити в наочний образ ми можемо лише тоді, коли дивимось на вимірювальний прилад, коли констатуємо факт.

У «Вибраних працях» К. Максвелла надруковано схему — модель електромагнітного поля, як його уявляв великий англійський фізик. Математична теорія поля, створена Максвеллом, проста і красива. Але ніякого механічного образу для цієї теорії Максвелл не міг відшукати. Опублікована модель була, очевидно, найкращим, що він міг придумати: шестикутники зображали «молекулярні вихорі», між ними вміщувалися «направляючі коліщатка».

Часто підкреслюють, що ця наївна схема ілюструє спробу фізиків минулого сторіччя дати наочну картину поля в звичних поняттях класичної механіки. Це вірно; такі недоречні ситуації виникали і, мабуть, виникатимуть завжди — нову теорію спочатку намагаються «втиснути» в старі поняття, так само, як перший автомобіль був дуже схожий на фіакар; лише згодом новий зміст знаходить собі відповідну форму. Проте суть у тому, що наука минулого сторіччя обов'язково знаходила наочний образ для теоретичних побудов. Що таку наочну модель повинна описувати класична механіка — це вже наслідок: саме для «звичайних», спостережуваних ситуацій класична механіка й створювалась!

Перегляд погляду на роль наочного образу — одна з особливостей сучасної революції в природознавстві.

Якщо чуттеві наочні образи — така ненадійна основа наукової картини світу, то логічно покладатися на більш точні елементи теоретичних знань — на математичний апарат.

Справді, сила класичної механіки, очевидно, зовсім не в тому, що тут ми говоримо «точка», а маємо на увазі звичайне тіло; говоримо «швидкість в момент часу t », а уявляємо не час взагалі, а звичайні годинники. Після праць Л. Ейлера, Ж. Лагранжа, У. Гамільтона, К. Якобі класична механіка набуває все більш математизованого вигляду, формулювання її законів не вимагають ніякого звернення до наочності. Основні поняття механіки значною мірою сповнюються абстрактно-математичним змістом і пов'язуються між собою строго математичними відношеннями.

І все ж... Все ж фізик «про себе» завжди знає, що математична точка — це абстракція від дуже маленької плями, математична крива — це абстракція від дуже вузької смужки. За висловом німецького математика Ф. Клейна, «фізики внаслідок однобічної звички уявляють собі все з точки зору наближеної математики, тобто з точністю до певної, кожного разу встановлюваної кількості десяткових знаків»¹. Коли ж математичні уявлення вступали в конфлікт з «наочністю», «очевидністю», «здоровим глуздом», фізик XVIII і XIX ст. завжди опинявся на боці останнього.

Яскравим прикладом цього може бути проблема безконечності Всесвіту.

Мабуть, уяву кожного в юності вражала ідея безконечності. Створити образ Всесвіту, який «не має кін-

¹ Ф. Клейн. Лекції по історії математики в XIX столітті, ч. 1. М., 1937, стор. 307.

ця», неможливо. Але не менш протривить наша інтуїція образу кінцевого Всесвіту. Негайно виникає питання-протест: а що ж далі, за «кінцем світу»? І мимоволі пригадується старовинний малюнок: людина дійшла до «кінця світу», стала навколішки, пробіла «небесну твердь» і бачить, що там починається «інший світ».

І. Ньютон показав, що Всесвіт безкінечний, коли закон тяжіння усюди має силу — інакше всі тіла під дією тяжіння повинні були б зібратися в одну масу. Працями англійського астронома В. Гершеля ще у XVIII ст. була підтверджена справедливність закону тяжіння поза межами Сонячної системи і тим самим, здавалося б, доведена теза про безкінечність Всесвіту у Ньютонівському розумінні.

Наприкінці XIX ст. німецьким астрономом Г. Зеелігером були зроблені математичні обрахунки на основі Ньютонівських припущень, і результат приголомшив учених: виходило, що в кожній точці простору сила тяжіння повинна бути безкінечною або невизначеною, що абсурдно! З'явився такий же строгий математичний аргумент проти безкінечності Всесвіту.

Поряд з цим парадоксом, що одержав назву гравітаційного, існує і так званий фотометричний парадокс: у випадку рівномірного заповнення Всесвіту тілами, що випромінюють енергію, густина поля випромінювання повинна бути дуже великою, небо яскравим, як Сонце, а середня температура Всесвіту рівною близько $5-10^9\text{K}$!

Різними шляхами пішла переважна більшість вчених, але всі вони стихійно обрали одну передумову: Всесвіт, звичайно, безкінечний, і треба просто внести якісь поправки в ньютонівську модель. Основою цієї упевненості була не математика, а та ж сама «очевид-

ність». Лише А. Ейнштейн наважився відмовитися від цієї «очевидності» у загальній теорії відносності.

Можна навести чимало прикладів прохолодного ставлення фізиків до абстрактних математичних проблем, які, здавалося, не мають реального значення для природодослідника.

Кожен елементарно знайомий з математичним аналізом знає, що коли побудувати графік неперервної функції, то числове значення похідної в певній точці кривої дорівнює тангенсу нахилу дотичної в цій точці кривої до осі абсцис.

З механіки, далі, відомо, що графічно залежність шляху від швидкості і часу ($S=vt$) може бути зображена у вигляді кривої; швидкість точки в момент часу t — це вектор, направлений по дотичній до траєкторії в точці, що відповідає t ; нарешті, вектор прискорення у даній момент часу є похідна від вектора швидкості точки, взята по часу.

Поняття неперервної функції і похідної, кривої і дотичної, руху і швидкості настільки асоціювалися в свідомості математиків і фізиків ХІХ ст., що тоді говорили: «Немає руху без швидкості, кривої без дотичної, функції без похідної». Вважалося, що кожна неперервна функція мусить мати похідну в кожній точці з такою ж логічною необхідністю, як кожному рухові притаманна швидкість.

Математиків давно турбувала відсутність точного доказу цього «очевидного» положення; вже М. І. Лобачевський вказував на його «неочевидність». Коли ж неперервна функція, яка не має похідної, була побудована, фізики просто ігнорували цей «математичний курйоз». Один із провідних представників математичної фізики ХІХ ст. твердив: «Закон мислення гово-

рив, що кожна функція лінійна на безконечно малому інтервалі»¹.

Що ж це за закон мислення? Наочний образ? Ні, тому що неперервність — дуже складне математичне поняття, недосяжне чуттєвій уяві так само, як безконечність. Напевно, слід надалі відрізнити «наочність» (або чуттєво уявлюваний образ) від «очевидності» як чогось звичного для мислення (а не уяви!). Некритичне прийняття Ньютонової ідеї безконечного Всесвіту, в якому матерія розподілена рівномірно, належить саме до таких «очевидностей». І зрештою ці «очевидності» виявляються «неочевидними», тобто такими, що потребують доказу, і навіть хибними!

Легко уявити, як болісно переживали вчені втрату «очевидностей». З приводу неперервних функцій без похідних французький математик Ш. Ерміт писав, що він «відвертається» від них «із жахом і жалем». Голландський фізик Г. Лоренц говорив радянському вченому А. Ф. Йоффе у 1924 р.: «Я втратив упевненість, що моя наукова праця вела до об'єктивної істини, і я не знаю, навіщо жив; шкода лише, що не вмер п'ять років тому, коли мені все ще здавалося ясним»². Так, боротьба за істину в науці ХХ ст. виявилася набагато драматичнішою, ніж це уявляли собі спокійні оптимісти кінця минулого сторіччя.

Відомо, що в середні віки теологи-схоласти іноді кінчали життя самогубством через неспроможність розв'язати парадокси, які впливали з фундаментальних положень релігії.

Цікаво, що на початку ХХ ст. математики зіткнулися з проблемами, за своєю логічною структурою над-

¹ Ф. Клейн. Лекції по історії математики в ХІХ столітті. ч. 1. М., 1937, стор. 307.

² А. Ф. Йоффе. Встречи с физиками. М., 1960, стор. 58.

звичайно схожими на старовинні логічні загадки, в тому числі і деякі парадокси, які мучили теологів! Йшлося, звичайно, не про бога. Необхідність з'ясувати загальні властивості будь-яких функцій привела до поняття «множина»; розглядалися множини множин; множини всіх множин; множини всіх множин, що є підмножинами самих себе... І ось тут молодий тоді англійський логік і математик Б. Рассел й незалежно від нього — італійський математик Е. Цермело знайшли суперечність, схожу на давно відомі логічні парадокси.

Власне кажучи, науковий світ повинна була б охопити паніка. Адже йшлося про самі підвалини математичної науки! Сила математичного мислення — в його доказовості, несуперечливості, логічній стрункості, «прозорості» аргументації. А якщо в основі цих побудов — суперечність не менш глибока, ніж та, яка зв'язана з припущенням про існування всемогутнього бога?

Слід сказати, що не лише переважна більшість природодослідників, а й значна частина математиків поставилася до драми ідей в теорії множин, як до бурі у склянці води. Здавалося, що ця драма відбувалася десь на периферії науки, далеко від прикладних галузей математики.

Не можна сказати, що проблема обґрунтування математики розв'язана й зараз. Але те, що зроблено більш ніж за півсторіччя, дає змогу не лише спокійно оцінювати труднощі і перспективи. Робота по логічному аналізу основ математики викликала до життя могутню логічну техніку, без якої немислима була б сучасна кібернетика. Побічним продуктом «схоластичних» суперечок, отже, стала наука величезного прикладного значення.

Але повернемося до суто теоретичного аспекту справи.

Перед математиками постало питання: де корениться логічна суперечність і як її усунути? Чи не міститься корінь зла вже у тих припущеннях, на котрих ґрунтується елементарна людська логіка? Чи, може, в основі парадоксів, що їх можна побудувати в класичній математиці, лежать якісь додаткові припущення? Тоді чи не можна обійтися без них? Перегляд основних понять, критичний аналіз «звичайних», «очевидних» уявлень став необхідністю і для таких галузей знання, де наука, здавалося б, почувала себе найбільш упевнено — для логіки і математики.

«КРИЗА ОЧЕВИДНОСТІ»

Науково-технічна революція, що супроводжувалась нещадною «кризою очевидності» (вислів швейцарського математика Ф. Госнета), мала великий філософський резонанс. На «кризі очевидності» активно спекулювали різні ідеалістичні школи, які здебільшого так само швидко вмирили, як і народжувалися.

Спробуємо розібратися, в чому полягала криза стихійного матеріалізму природодослідників ХІХ ст.

За Ф. Енгельсом, розвиток природознавства у ХІХ ст. проходив під знаком трьох великих відкриттів: закону збереження енергії, теорії походження видів Дарвіна та теорії клітини. Ці революційні відкриття 40-х рр. минулого віку стали основою впевненості учених-природознавців у матеріальній єдності світу, у взаємоперетворюванні форм руху матерії, джерелом ідеї розвитку. Оскільки в науці того часу, зокрема у фізиці, математичний апарат мав підпорядковане значення щодо інших понять і уявлень, абстрактним поняттям науки давалася найвісно-матеріалістична інтерпретація на «предметах навколишнього світу». Майже нікому не

приходило в голову «істинним» поняттям маси вважати і словий множник, «маса» асоціювалася з мірою матеріальності.

Здавалося, логічно було б шукати відповідний «реповинний» еквівалент і такому поняттю, як «сила». Однак після відкриття закону збереження і перетворення енергії і розробки кінетичної теорії наука остаточно пориває з уявленнями про «сили». Зведення сили до руху матерії, — при тому, зрозуміло, механічного, — було неминучим наслідком відмови від понять «теплодод», «флогістон» тощо.

Так, П. Тет, один із авторів найпоширенішого в Європі підручника фізики, писав: «Більш ніж імовірно, що зрештою всі різні форми енергії будуть визнані залежними від різного стану руху матерії»¹. Так писав навіть фізик, якого Енгельс критикував за ідеалізм!

Єдність рухомої матерії, різноманітність «сил» і «енергій» як наслідок різноманітності форм руху матерії — все це положення, прийняття яких природознавцями ХІХ ст. було проявом їх стихійного матеріалізму. Стихійний матеріалізм, «здоровий глузд» природознавців також є основою переконання в тому, що атом ділимий до безконечності. Світ складається з атомів; отже, атоми теж повинні з чогось складатися — такий висновок впливав саме з вимог «здорового глузду», який не може примиритися з конечністю. Поняття «абсолютно твердих атомів» вело до отожднення атомів з точками, а фізик, говорячи «точка», завжди мав на увазі цілком реальне маленьке тіло, розмірами якого можна знехтувати. Теза про безконечну ділимість атома, як її розуміли природознавці ХІХ ст., була настіль-

¹ Цит. за кн.: Ф. Розенбергер. История физики, т. 3. М., 1936, стор. 186.

ки ж сильною, наскільки слабкою стороною науки того часу: вона була споріднена з уявленнями про безко-нечну систему ієрархій, з концепцією Ламбертена — Шарлье, за якою світ уявляється безконечною «мат-рьошкою», вкладеною одна в одну. Ця концепція не витримує наукової критики. З філософської точки зору уявлення про безконечну ділимість атома (в механіч-ному розумінні), підказане «здоровим глуздом», вело до наочного образу безконечності, що знову ж таки суперечило «здоровому глуздові». Звичайно міркування з цього приводу закінчувалися зітханням: очевидно, правий Кант, і істини пізнати ми не можемо. Стихійний матеріалізм ховався за спину агностицизму.

Так, не все було гаразд у тій картині світу, що її малювала собі уява природодослідника XIX ст. Незро-зумілі ситуації складалися, так би мовити, «у закут-ках», на периферії фронту досліджень. І раптом всі ті філософські, логічні, природничо-наукові загадки, що викликали лише деякий неспокій, опинилися в центрі уваги.

Визначний англійський фізик Дж. Томсон на порозі нового століття на обрії ясного неба науки бачив лише дві хмарки, дві нерозв'язані проблеми — саме з них згодом вирости квантова механіка та теорія відносності. Ні, не заповнили неба темні грозові хмари — просто наука не може відсиджуватись у фортецях, вона не обороняється, а наступає. У наш час вона далеко за-лишила позаду ті території, що ледве виднілися колись на обрії, врізалася в саму гущу хмар, і вороття до наїв-ної ясності вже немає. Разом з тим старі філософські питання змінили свою форму і значущість.

Теоретичне мислення нашої епохи залишило далеко позаду зручний світ звичних предметів і має справу іно-ді з химерними, здавалося б, витворами людського

розуму. Наскільки б не було чужим буденному досвідові уявлення про якісно однорідну речовину, з якої складаються атоми, «цеглинки» великої будови Всесвіту; наскільки б не лякала уяву картина нескінченної кількості частинок, все менших і менших, що створюють неосяжну архітектоніку безконечно складної матерії, — все ж щі уявлення якомсь, так би мовити, примикають до нашої інтуїції. Але коли кардинальної зміни зазнало саме уявлення про речовину, коли неспроможними виявилися і наочні образи, і — багато в чому — математична інтуїція, повальна недовіра до «здорового глузду» охопила багатьох природодослідників, і разом із старими натурфілософськими уявленнями почали піддаватись критиці її основи стихійного матеріалізму науки.

НА «ЗДОРОВИЙ ГЛУЗД» ВСЕ Ж МОЖНА ПОКЛАДАТИСЯ

«Здоровий глузд» не лише природодослідника, але й кожної нормальної людини базується на твердій впевненості в тому, що об'єкти людського мислення та людських відчуттів існують незалежно від свідомості людини. Важко переконати простого смертного в тому, що стіл, який він бачить у кімнаті, негайно зникає, коли закриєш очі. Це — непохитна «наївно-реалістична» основа матеріалістичної філософії. І саме тут філософ-ідеаліст вбачає «донаукові уявлення», неприпустимі в епоху загальної «кризи очевидності».

Величезне історичне значення праці В. І. Леніна «Матеріалізм і емпіріокритицизм», написаної в роки, коли «революція в природознавстві» ще тільки розпочиналася, полягає, зокрема, в тому, що у ній відстояно ті матеріалістичні основи природознавства, які ідеалізм ладен був поховати під уламками натурфілософії XIX ст. Відзначивши обмеженість «наївного реалізму»,

потребу перегляду «натурфілософської форми» діалектичного матеріалізму, В. І. Ленін підкреслив необхідність розвитку однієї лінії в філософії — лінії філософського матеріалізму і захищав основне переконання «наївного» матеріалізму, в тому числі і стихійного матеріалізму науки XIX ст. — переконання в об'єктивній реальності навколишнього світу.

Так, «криза очевидності» завдала нищівного удару застарілим натурфілософським уявленням. Логічні побудови, ніяк, здавалося б, не пов'язані з навколишнім «звичайним» досвідом, виявились більш «реальними», ніж «очевидні» уявлення. Сучасна наука не може не зважати на те, що наші поняття створені людьми, антропоморфні за своїм походженням, і картина світу, намальована уявою жителів інших планет, несла б на собі риси їх власної, чужої і незрозумілої нам, організації. Але це зовсім не означає, що наука — довільний витвір людського розуму, позбавлений реального ґрунту.

Прогрес науки не відбирає в неї такої міцної підвалини, як «здоровий глузд», як упевненість в істинах, перевірених тисячоліттями людської практики. Поразка «здорового глузду» не означають, що пізнавальна цінність «наочності» і «очевидності» зводиться до нуля. Просто все більш чітко визначаються межі території, де дозволено керуватися згаданими принципами. У рамках, де «здоровий глузд» — перевірена зброя, він зберігає свою цінність. Більше того, якщо теорія веде до висновків, які суперечать «здоровому глузду», «наївному» спостереженню, «примітивному» життєвому досвідові там, де ці принципи цілком правомірні, — тобто у нашому реальному практичному житті, тоді теорію слід просто відкинути.

Ось чому загальноприйнятою у науці, зокрема в логіці, є така вимога: кожна теорія, наскільки б вона не

була відділена від «очевидності», при певних умовах, в певному граничному випадку повинна давати результати, які не суперечать «здоровому глузду» і пов'язаним з ним «очевидностям».

Історична обмеженість механістичного матеріалізму ясно виявилась уже в першій половині ХІХ ст., що й було однією з передумов виникнення новітнього матеріалізму — матеріалізму Маркса і Енгельса. Революція в природознавстві на межі ХІХ і ХХ ст. привела до того, що старий, механістичний матеріалізм не міг вже бути основою стихійних філософських уявлень природодослідника навіть у галузі нової механіки. Діалектика вища за «здоровий глузд», науковий матеріалізм — за стихійне «грубе почуття реальності». Та розвиток знань не відкидає «здорового глузду» і стихійного матеріалізму — він лише відводить їм певне місце, у рамках якого вони цілком правомочні.

Зрозуміло, що з цієї точки зору повної поваги і довіри заслуговує і формальна логіка, яка служила людині протягом багатьох сторіч. Нехай обмежені її можливості, але принаймні суперечити формальній логіці, як і «здоровому глузду», не повинні найскладніші теоретичні споруди.

Важливо лише ясно зрозуміти, де саме формально-логічний аналіз стає безсилим і вимагає широкого світоглядного осмислення проблеми з залученням філософських аргументів.

ОСНОВНІ ІДЕЇ І МЕТОДИ СУЧАСНОЇ ФОРМАЛЬНОЇ ЛОГІКИ

У середині ХІХ ст. лише кілька людей, натхненних ідеєю застосування математичних методів у гуманітарних науках, захопилися створенням «алгебри логіки». В 70—80-х рр. з'явилися терміни «булева¹ алгебра», «логічне числення», «символічна логіка». Більшість логіків зустріли ці нові явища як непорозуміння, як приклад одержання істинних результатів при абсолютно хибних методах. Праці ентузіастів по-справжньому привернули до себе увагу лише після того, як на початку нашого сторіччя з'явились перші публікації Б. Рассела.

Сьогодні математична логіка — це цілком правомірний розділ логіки, визнаний не лише теоретиками, але й практиками. Вона, так би мовити, непомітно переходить у математику, що дає підстави вважати її і галуззю математичної науки. Проте слід зауважити, що основні результати традиційної формальної логіки повністю можуть бути виражені засобами математичної логіки, так що немає ніяких підстав твердити, ніби існують дві логіки: формальна і математична. Символічна, або математична, логіка і є формальна логіка на сучасному етапі її розвитку.

¹ Від прізвища англійського математика Дж. Буля.

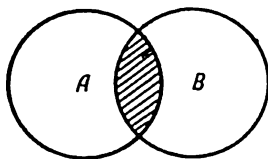
Читач не зможе почерпнути з цього розділу елементарних знань з сучасної формальної логіки. Автор прагнув лише дати загальне уявлення про основні ідеї і методи сучасної формальної логіки та засоби їх застосування і познайомити з термінами, без яких не зможе обійтись у подальшому викладі.

ІДЕЯ «ЛОГІЧНОГО ЧИСЛЕННЯ»

Ідею, яка дозволила провести аналогію між алгебраїчними та логічними операціями, можна пояснити таким чином.

Припустимо, що A , B — це імена певних сукупностей (класів) об'єктів. Розглянемо, імена яких об'єктів можна утворити за допомогою слів i , або, ne .

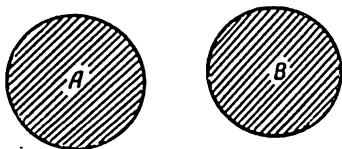
Нехай A — знак, що іменує учасників художньої самодіяльності, B — студентів Київського університету. Тоді окладним знаком A і B іменуємо тих, хто є одночасно учасником самодіяльності і студентом Київського університету. Графічно зобразивши класи A й B колами, клас A і B ми зобразимо як переріз класів A й B :



Операція перерізу класів може бути алгебраїчно представлена як множення класів. Логічну операцію утворення нового класу за допомогою слова i називають кон'юнкцією. Вживаючи символ \cdot замість i , символ \times як знак множення, одержимо:

кон'юнкції $A \cdot B$ відповідає алгебраїчна операція множення $A \times B$.

Нехай, далі, A означає всі озера, B — всі ріки
Тоді A або B іменує всі ті об'єкти, що є або озерами
або ріками:



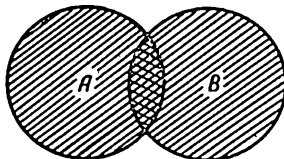
Заштриховано ті об'єкти, які позначено терміном A
або B . Як видно із схеми, A або B іменує той клас
об'єктів, що утворюється внаслідок додавання (об'єд-
нання) класів A і B . Операцію утворення нового класу
за допомогою слова *або* називають операцією диз'юнк-
ції. Вживаючи замість *або* символ \vee , а $+$ як знак до-
давання, одержимо:

диз'юнкції $A \vee B$ відповідає алгебраїчна операція
додавання $A + B$.

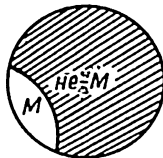
Правда, тут виникає одна неясність. До класу «озе-
ра або ріки» входять і озера, і ріки; при цьому не
можна бути одночасно озером і рікою. Та ось інший
приклад. Термін «озера або моря» іменує ті об'єкти,
що є або озерами, або морями. Але Каспійське і Араль-
ське моря є водночас і озерами, і морями. Тому в да-
ному випадку, говорячи «моря або озера», ми маємо
на увазі все те, що є або морями, або озерами, або
одночасно і морями, і озерами. Графічно клас «моря
або озера» буде зображений заштрихованою частиною
схеми (стор. 33).

Отже, доведеться розрізнити два значення слова *або*:
строге (як у першому прикладі) і нестроге (як у дру-
гому прикладі). Символом строгої диз'юнкції є знак \vee ,
< означає нестрогу диз'юнкцію.

Нарешті, розглянемо клас $не-M$, чи заперечення класу M . Для цього припустимо, що нам відомі всі предмети даного роду, і вони утворюють «повний клас».



Наприклад, яблука, груші, сливи тощо утворюють «повний клас» фруктів; M — ім'я класу яблук. Тоді $не-M$ — термін, що іменує всі інші предмети «повного класу»:



Таким чином, клас $не-M$ можна розглядати як доповнення M до «повного класу», або як клас $I-M$, де I — символ «повного класу». Замінивши слово $не$ знаком $-$, маємо:

заперечення M відповідає алгебраїчній операції віднімання $I-M$.

Вживатимемо надалі як імена класів символи змінних величин X, Y, Z тощо. Отже, оперування з логічними знаками, \vee, \sim можна звести до алгебраїчних операцій; можна помітити, що тут діятимуть закони алгебри:

$$X \times Y = Y \times X \quad (\text{комутативний закон});$$

$$X \times (Y \times Z) = (X \times Y) \times Z \quad (\text{асоціативний закон})$$

$$Z \times (X + Y) = (Z \times X) + (Z \times Y) \quad (\text{дистрибутивний закон}).$$

Одержана алгебра матиме цікаву відміну від звичайної: x^2 , тобто $x \times x$, тобто $x \cdot x$, завжди дорівнюватиме x (клас «озера і озера» — це той самий клас, що і клас «озера»). У звичайній алгебрі $x \times x = x$ лише у двох випадках: коли $x=1$ або $x=0$. Напрошується аналогія із значеннями «істинно» та «хибно»...

Дальший розвиток ідей в цьому напрямку повинен був би привести нас до формування поняття «логічна функція» і введення дуже складних обрахунків. Але для того щоб дати математично строге формулювання законів логіки, найпростіше на першому етапі відмовитись від розгляду класів, оскільки клас — досить складне поняття, і розглядати речення як ціле з точки зору його істинності або хибності. При цьому можна базувати логіку на алгебраїчних поняттях, а можна логічні операції вводити незалежно від математики.

ЧИСЛЕННЯ РЕЧЕНЬ

Будемо позначати символами p, q, r, \dots, x, z тощо речення; змінні в цьому випадку називатимуться пропозиційними змінними (від англ. proposition — речення). До формул, які ми розглядатимемо, належатимуть не лише пропозиційні змінні, але й сполучення змінних за допомогою символів логічних операцій. Оскільки ми беремо до уваги лише одну властивість, а саме властивість бути істинними або хибними, то будемо вважати, що змінні приймають одне з двох значень: «істина» (I) та «хиба» (X). Відповідно лише (I) або X можуть бути значеннями сполучень, утворених із змінних та символів логічних операцій.

Що таке i або що таке логічна операція «кон'юнкція»? Замість того, щоб давати якісь словесні описи значення знака i , випишемо такі залежності:

Якщо x істинне і y істинне, то $x \cdot y$ істинне.

Якщо x істинне і y хибне, то $x \cdot y$ хибне.

Якщо x хибне і y хибне, то $x \cdot y$ хибне.

Якщо x хибне і y істинне, то $x \cdot y$ хибне.

Оскільки такий запис займає багато місця, замінимо його таблицею, в якій неважко розібратися без коментарів:

$x \setminus y$	I	X
I	I	X
X	X	X

Аналогічні таблиці побудуємо для заперечення, нестроїї диз'юнкції й так званої матеріальної імплікації (якщо..., то...).

Заперечення ~	Диз'юнкція \vee	Матеріальна імплікація \supset
$x \sim x$	$x \setminus y$	$x \setminus y$
I X	I X	I X
X I	I I X X	I X I I

Ці таблиці можна розглядати як визначення слів *не*, *і*, *або* і *якщо..., то...*, оскільки для логіки тут дано все, що він повинен знати про ці сполучники.

Не — це така частка, котра, якщо її поставити перед істинним реченням, робить його хибним.

І — це слово, яке, коли ним сполучити два речення, робить нове, складносурядне речення істинним в одному-єдиному випадку: якщо обидва речення, котрі входять до новотвору, істинні.

Або розуміємо так, як у вищезгаданому прикладі з озерами і морями.

Щодо звороту *якщо..., то...*, то його визначення може здатися дещо штучним: дозволяється вважати істин-

ним не лише випадок, коли з хибного випливає хибне, але й випадок, коли з хибного випливає істинне речення. Дійсно, заборони на вживання вислову «якщо... то...», накладені цим визначенням, досить слабкі: не дозволяється вважати вислів *якщо x , то y* істинним лише в тому випадку, коли x істинне, а y хибне. Проте це відповідає припущенню, згідно з яким правильний висновок випливає і з хибного твердження, але неможливо, щоб із істинного твердження випливало хибне.

У зв'язку з тим, що можуть розглядатися громіздкі формули, до складу яких входять вищезгадані логічні знаки (конектори, або логічні функтори), змінні, дужки, треба було б із самого початку домовитися, що будемо вважати правильно побудованою формулою, як вживати дужки тощо. Але оскільки тут викладаються лише основні ідеї і не робиться спроба навчити читача користуватися логічними операціями, дозволимо собі деякі вільності. Відзначимо лише, що коли знак \sim стоїть перед дужками, то він заперечує увесь вираз, а якщо перед окремою змінною — то лише цю змінну.

Для побудови числення речень потрібно розв'язати передусім одну задачу: за виглядом даної формули, користуючись лише матрицями (тобто лише визначенням конекторів), навчитися розпізнавати значення всього виразу. Очевидно, можуть мати місце три випадки:

— формула при будь-яких значеннях пропозиційних змінних матиме значення «істина»;

— формула при будь-яких значеннях пропозиційних змінних матиме значення «хиба»;

— формула при будь-яких значеннях пропозиційних змінних матиме значення «істина», при інших — «хиба».

Відповідно розрізняють такі формули: тотожно-істинні (або тавтології), тотожно-хибні та здійсненні.

Так, окрема пропозиційна змінна p може мати значення «істина» або «хиба» залежно від того, яке речення ми позначимо цією змінною; пропозиційна змінна, отже, є здійсненна формула. Формула $p \supset q$ теж здійсненна — вона буде хибною при істинному p та хибному q , істинному в інших випадках, так що істинність її в цілому — справа випадку. Формула $p \cdot \sim p$ буде хибною згідно з визначенням конектора: не може бути такого, щоб p і $\sim p$ водночас були істинними. Формула $p \supset p$ буде істинною при будь-якому значенні p : не може бути такого, щоб перед знаком \supset була істина, а після нього — хиба, адже і там, і там одна і та ж змінна.

Визначення конекторів дають змогу розібратися, чи є дана формула тотожно-істинною, тотожно-хибною чи здійсненою. Покажемо на одному прикладі, як це робиться.

Дана формула $p \supset (q \supset p)$. Щоб вирішити, до якої з трьох груп вона належить, зробимо по черзі такі пущення.

Нехай p істинне, q істинне. Підставимо замість змінних їх значення:

$$I \supset (I \supset I).$$

Згідно матриці, $I \supset I$ завжди істинне. Можемо замість виразу в дужках записати I , тоді

$$I \supset I.$$

Такий вираз завжди істинний, отже, при істинному p та істинному q формула $p \supset (p \supset p)$ істинна.

Нехай p істинне, q хибне. Тоді маємо:

$$I \supset (X \supset I).$$

Оскільки $X \supset I$ істинне за визначенням, замість виразу в дужках підставимо I . Знову одержуємо $I \supset I$, тобто формула істинна і в цьому випадку.

Перевіривши в такій спосіб ще два можливі варіанти, ми переконуємося, що формула $p \supset (q \supset p)$ є тотожно-істинною, або тавтологією.

Частіше замість значення «істина» (1) або «хиба» (X) пишуть цифри «1» чи «0», і тому наведений метод називають методом нуль-одиночної перевірки. Для будь-якої правильно побудованої формули числення речень нуль-одиночний метод дає можливість встановити, до яких формул вона належить: до тавтологій, тотожно-хибних чи до здійснених. Таку перевірку називають процедурою розв'язання.

Метод нуль-одиночної перевірки дає нам ще одну можливість: підібрати такі пари здійснених формул, які набирають значення «істина» чи «хиба» при одних і тих же значеннях змінних. Так, неважко переконатись, що формули $\sim(x \cdot y)$ і $\sim x \vee \sim y$, кожна з яких є здійсненою (може бути хибною або істинною залежно від значення змінних), набирають значення «істина» лише в одному випадку — при хибному x і хибному y . Такі формули називають рівносильними. Рівносильними будуть також формули $x \supset y$ і $\sim x \vee y$, формули $x \supset y$ і $\sim(x \cdot \sim y)$.

Оскільки в логіці нас цікавить лише одна властивість речень — їх істинність або хибність, то завжди можна підставити одну рівносильну формулу замість іншої — значення виразу в цілому не зміниться. Іншими словами, для логіки вираз $x \supset y$ означає те саме (має те ж значення), що $\sim x \vee y$. Цю обставину можна використати для того, щоб замінити формулу з імплікацією на формулу з диз'юнкцією та запереченням, формулу з кон'юнкцією та запереченням на формулу з імплікацією, формулу з диз'юнкцією на формулу з кон'юнкцією і запереченням тощо. Отже, можна виразити одні конектори через інші, можна робити над формулами перетворення,

від яких не змінюється їх істиннісне значення. Легко показати, що рівносильними є формули

$$\begin{aligned} &x \cdot y \text{ та } y \cdot x; \\ &x \cdot (y \cdot z) \text{ та } (x \cdot y) \cdot z; \\ &z \cdot (x \vee y) \text{ та } (z \cdot x) \vee (z \cdot y). \end{aligned}$$

Керуючись списком рівносильних формул, підібрати які неважко, можна будь-яку правильно побудовану формулу числення речень звести до вигляду, для якого існує дуже простий спосіб розв'язання (до так званої диз'юнктивної нормальної форми). Метод знаходження таких форм, рівносильних будь-якій даній формулі, простіший від нуля-одиничної перевірки, принаймні не такий громіздкий, і являє собою теж процедуру розв'язання в численні речень. Історично він більш пов'язаний з алгебраїчними аналогіями і тому був розвинутий раніше, ніж метод нуля-одиничної перевірки.

АКСІОМАТИЧНІ ПОБУДОВИ ЧИСЛЕННЯ РЕЧЕНЬ

Власне кажучи, головне завдання побудови числення речень можна було б вважати розв'язаним: ми вміємо відрізнити правильно побудовані формули від неправильно побудованих, а для будь-якої правильно побудованої формули існує процедура розв'язання.

Але логіка створювалась для того, щоб пояснити, що таке висновок, «логічне слідування». Тому не можна задовольнитися процедурами розв'язання.

Для того щоб побудувати зручну аксіоматику, передусім потрібно обрати вихідні конектори. Оскільки одні конектори можна виразити через інші, можна зупинитися на будь-якій парі конекторів: імплікації і запереч-

ченні, диз'юнкції і запереченні, кон'юнкції і запереченні. Можна, звичайно, вживати всі конектори одночасно.

Можна ввести нові конектори. Наприклад, формулу

$$(x \supset y) \cdot (y \supset x)$$

записати скорочено

$$x \equiv y.$$

Формула якщо x , то y і якщо y , то x може бути прочитана так: x , якщо і тільки якщо y .

Знак \equiv називають знаком матеріальної еквівалентності. В одній з аксіоматик польського логіка Лесневського знак \equiv вживається як вихідний конектор.

Можна застосувати знак «заперечення кон'юнкції» («штрих Шеффера», або «оператор несумісності»), так що / визначатимуть за допомогою матриць таким чином, що x/y рівносильне $\sim x \cdot \sim y$. Можна вживати знак «заперечення» диз'юнкції» (\downarrow), при якому $x \downarrow y$ (*не- x* або *не- y*) рівносильне $\sim x \vee \sim y$. В обох цих випадках досить одного-єдиного конектора, оскільки він об'єднує і кон'юнкцію (відповідно диз'юнкцію), і заперечення.

Після цього треба підібрати серед тотожно-істинних формул кілька таких, що приймаються за вихідні положення (аксіоми). Нарешті, слід точно сформулювати правила, за якими з аксіом можна одержувати теореми, з аксіом і доведених теорем — нові теореми.

Для числення речень достатньо двох правил виведення: «модус поненс» і правило підстановки. «Модус поненс» формулюється так: якщо доведено $x \supset y$ і доведено x , то (тим самим) доведено y . Замість слова «доведено» («тим самим доведено, що...») вживають звичайно символ \vdash , і правило «модус поненс» записується так:

$$\text{якщо } \vdash x \supset y \text{ і } \vdash x, \text{ то } \vdash y.$$

Правило підстановки дозволяє замінити довільну пропозиційну змінну, котра входить до складу якоїсь формули, довільною правильно побудованою формулою. Нехай A — формула, до складу якої входить пропозиційна змінна x . Операція підстановки (її символ — $S_{x|A}$) полягає в тому, що замість змінної x у формулу A підставляється довільна формула B ($S_{x|A} B$). Правило підстановки формулюється так: якщо x — змінна, то A впливає $S_{x|A}$.

Теорема вважається доведеною, якщо вона одержана аксіом за допомогою лише двох дій — підстановки та «модус поненс». Треба навчитися добирати такі дозволені підстановки, щоб у тій частині формули, яка передує знакові імплікації (вона називається антецедентом імплікації), була формула, що є або аксіомою, або однією з уже доведених теорем. Тоді, оскільки дана імплікація і даний її антецедент, за правилом «модус поненс» можна відкинути антецедент і вважати доведеною ту частину формули, яка стоїть після знаку імплікації (її називають консеквентом). Так продовжують доти, поки не залишиться формула, яку потрібно довести.

Перша аксіоматика числення речень (система німецького математика Г. Фреге, 1879) складалася з шести аксіом, з яких одна, як виявив пізніше видатний польський логік Я. Лукасевич, була зайвою — її можна одержати на основі інших п'яти. Логіки, які працювали після Г. Фреге, довго не робили спроб побудувати аксіоматичні системи. Запропонована 1903 року Б. Расселом система з 7 аксіом стала своєрідним «каталізатором» процесу створення таких побудов. Дуже красиві системи аксіом складає в 20-х рр. Я. Лукасевич; на базі системи Фреге він створює систему з 3 аксіом (1924), на базі системи Рассела — іншу систему з 3 аксіом (1929)

Польський логік М. Вайсберг у 1938 р. побудував систему з 3 аксіом, де поряд із змінними запроваджено пропозиційну константу f — «хиба» і тому нема потреби в запереченні, є лише імплікація. Створено і системи з однією аксіомою — з застосуванням антикон'юнкції або антидиз'юнкції. З різних причин ряд авторів вважав за доцільне використовувати в аксіоматиці різні конектори: Б. Рассел і А. Уайтхед (1903) вживали диз'юнкцію і заперечення; Д. Гільберт (1928), потім Д. Гільберт і П. Бернайс (1934) будують системи з 12 аксіом, де застосували всі основні конектори. Після праці Дж. фон Неймана (1927) будуються і системи з безконечною кількістю аксіом, де єдиним правилом виведення є «модус поненс», виписуються аксіомні схеми; доводяться не теореми, а шляхом підстановки в аксіомні схеми змінних одержуються аксіоми (аксіомні схеми відіграють роль правил виведення). Всі згадані аксіоматичні числення еквівалентні в тому розумінні, що кожна аксіома чи теорема однієї системи є аксіомою або теоремою в іншій системі; не можна довести в одній з цих систем теореми, якої неможливо одержати в іншій. Так що йдеться не про істотну відміну однієї логіки від іншої, а про добір аксіом, більш чи менш зручних для розв'язання певних завдань.

ЛОГІСТИЧНІ СИСТЕМИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Побудовані таким чином логічні теорії задовольняють найсуворішим вимогам, що їх ставить наука до теоретичних систем. Ми маємо можливість спочатку написати всі символи, які надалі вживатимемо; строго визначати, яку конечну лінійну послідовність вихідних символів розглядатимемо як правильно побудовану формулу; вказати, які правильно побудовані формули вва-

жаємо аксіомами; встановити точні правила, за якими з одних правильно побудованих формул — засновків — одержуватимемо інші правильно побудовані формули — висновки. Послідовність усіх правильно побудованих формул, з яких кожна є або аксіомою, або висновком, називається доказом, а остання формула послідовності — теоремою. Аксіому можна розглядати як окремий випадок теореми — доказ аксіоми є послідовність правильно побудованих формул, що складається з однієї правильно побудованої формули, тобто самої аксіоми. Такий метод побудови теорії називають логістичним.

Отже, начебто і здійснено мрію про систему «числення умовиводів», фрагменти якої розвинув видатний німецький вчений Г. Лейбніц. Він називав майбутню систему «математичною логікою». На Міжнародному філософському конгресі 1904 р. було запропоновано назвати нову, математичну логіку логістикою — термін цей раніше означав мистецтво обрахунків.

Слід звернути увагу на таку обставину: при побудові теорії логістичним способом спочатку нічого не говорять про те, що означають ті чи інші послідовності символів — досить навчитися їх вживати. Слова «істинно», «хибно» не потрібні для побудови подібної системи; пізніше, коли визначено, що таке правильно побудована формула, аксіома, теорема, доказ, можна зіставити кожну теорему з об'єктом «істина». Зіставлення формальних виразів (тобто виразів, яким не приписується ніякий зміст) із сукупністю певних об'єктів за певними правилами називається інтерпретацією. Система, яка побудована логістичними методами і не має інтерпретації, називається логістичною системою. Після інтерпретації логістичну систему можна розглядати як мову (адже для того, щоб користуватись

мовою, треба не тільки розпізнавати вживані нею знаки, не тільки будувати правильні — з точки зору даної мови — сполучення знаків, але й співвідносити вирази мови з «позамовними» об'єктами).

Доказ теорем у логістичній системі стає схожим на розв'язання головоломок, на вигадування дотепних комбінацій в шахах. Але прозорість, ясність доказу тут купується досить дорогою ціною. Початківець, приступаючи до вивчення логістичних методів, завжди дивується: звідки відомо, що в цьому місці треба зробити саме таку, досить громіздку підстановку, щоб одержати, наче ненароком, простий результат? Перетворення техніки доказу на різновид гри із знаками не лише ускладнює техніку виведення, але й робить її мало схожою на ті докази, якими звичайно користуються в дедуктивних науках.

До кардинального спрощення техніки виведення привів розвиток методу припущень після праці польського логіка С. Яськовського та німецького логіка і математика Г. Генцена (1934). Читач, який познайомиться з цими методами за викладом Є. Слупецького та Л. Борковського (див. їх «Элементы математической логики и теория множеств», переклад з польської, М., 1965), зрозуміє, що доказ теорем у численні речень елементарно простий. Правда, система «натурального виведення» Генцена втратила логістичний характер, але в тому ж 1934 р. Генцен побудував своїм методом і логістичну систему. Різниця між аксіоматичними системами і системами генценівського типу, отже, лише в техніці виведення.

Чи можна вважати, що побудовані логістичним методом теорії достатньо надійні?

Ось ви розв'яжете якусь задачу з підручника логіки — доводите теорему. За виглядом теорема неважко

прийти до висновку, що вона тотожно-істинна: підставляючи в різних комбінаціях значення «1» та «0» замість змінних, легко переконатись, що формула має значення «1» при будь-яких значеннях змінних. Але скільки ви не добираєте формул, що з них ваша теорема має впливати, доказ все не виходить. Від встановлення за допомогою процедури розв'язання, чи є формула тавтологією, до знаходження послідовності всіх правильно побудованих формул, з яких дана формула випливає як висновок, тобто до доведення теореми, ще далеко.

А чи теоретично можливо знайти доказ для кожної тотожно істинної формули числення речень? А може, є такі тавтології, що для них жодна логістична система не може забезпечити доказу?

Ця проблема називається проблемою повноти. Без особливої складності можна строго довести, по-перше, що кожна тавтологія будь-якої із згаданих логістичних систем є теоремою (тобто в принципі для неї можна знайти доведення або розв'язати її); по-друге, що кожна теорема цих систем є тавтологією (тотожно-істинною формулою). Проблема повноти для числення речень розв'язана.

Виходячи з цього, легко довести, що розглядувані логістичні системи є несуперечливими — не містять одночасно якоїсь теореми разом з її запереченням. Передусім важливо сформулювати вимогу несуперечливості таким чином, щоб змістовне, інтуїтивно зрозуміле твердження «речення, яке щось стверджує, і речення, яке стверджує протилежне» набуло виразу, придатного для перевірки в логістичній системі. Можна знайти кілька коректних з логістичної точки зору формулювань вимоги несуперечливості і показати, що будь-яке із згаданих числень речень задовольняє цій вимозі.

Ввівши поняття несуперечливості, можна також відповідним чином ввести поняття недоповнюваності логістичної системи. Нехай B — формула, що не є ні аксіомою, ні теоремою даної логістичної системи. Логістична система недоповнювана, якщо і тільки якщо вона робиться суперечливою після приєднання до неї даної формули B або як аксіоми, або як теореми. Можна довести, що згадані логістичні системи повні, недоповнювані і несуперечливі.

...Зрештою, читач має право спитати: навіщо всі ці теорії будуються? Які істини можна одержати за їх допомогою? Можливо, ці істини незаперечливі, але цінність їх приблизно така, як відомого «прогнозу» погоди: «Або дощик, або сніг, або буде, або ні».

Справді, ми можемо дізнатись, що для будь-якого речення p справедливо, що якщо p , то p ; можемо дізнатись, що якщо дане речення p , то тим самим можна вважати, що p випливає з будь-якого речення q («випливає» тут вжито як синонім слів «якщо..., то...»). Але все це тавтології, твердження, які не несуть ніякої змістовної інформації!

І прекрасно, — скаже логік. А хіба не хвилює вас питання, чи не є вся математика набором подібних, тільки складніших тавтологій, чи не є всі її теореми різними способами твердити, що A є A ?

Ось на це останнє питання числення речень ніякої відповіді не дадуть. За допомогою числення речень неможливо навіть сказати про закони мислення все те, що було виражено засобами логіки Арістотеля. Та зате на надійній основі числення речень можна побудувати більш складні логічні теорії, які дозволятимуть уже перейти до математики.

ЧИСЛЕННЯ ПРЕДИКАТІВ

Надалі поряд з пропозиційними змінними розгляда-тимемо також вирази, в яких явно показана внутрішня структура речення. В реченні розрізнятимемо підмет і те, що про нього говориться. Позначивши підмет символом x , те, що про нього говориться — крапками, ми можемо записати загальну структуру речення таким чином:

... x ...

У реченнях «Автомашина синя», «Автомашина мчить по шосе», «На розі Володимирської та бульвару Шевченка зазнала аварії автомашини» тощо ми вбачатимемо скрізь одну й ту ж структуру: слово «автомашини» замінятимемо змінною x , відповідні члени речення, в яких міститься твердження про автомашину, — крапками. Вважаючи все сказане про x за його ознаки або властивості, можна ототожнити крапки із знаком предиката (предикатором), який ставиться звичайно перед змінною: $P(x)$, $G(x)$ тощо. Так, речення «Автомашина синя» набуде незвичного вигляду «синій (автомашини)»: Це робиться для зближення форми запису в логіці із звичною для математики формою запису функції $f(x)$; наприклад, $\sin(x)$.

Різниця між математичними та логічними функціями полягає в тому, що математичним функціям приписується числове значення, логічним — значення істиннісне. Так, функція $\sin(x)$ набуває значення в інтервалі від $+1$ до -1 . Однак, використовуючи вираз $\sin(x)$, можна побудувати речення (твердження). Наприклад, речення $\sin(x) = 0$ істинне, якщо і тільки якщо змінна x дорівнюватиме 0 , π , $-\pi$, 2π , -2π і т. д. Отже, речення $\sin(x) = 0$ є пропозиційна функція, або функ-

ція - речення — така особлива функція, що набирає значення «істина» або «хиба». Предикатом можна назвати ту частину пропозиційної функції, яка залишається після викреслювання змінної: $\sin(\)=0$. Поставимо предикат на перше місце і перепишемо весь вираз так: $[\sin(\)=0](x)$. Предикат можна розуміти як умову, що їй відповідають певні предмети, позначувані змінною; точніше, вираз $\sin(\)=0$ є предикат x , а вираз $\sin(x)=0$ є умова, якій повинен відповідати x , щоб речення було істинне.

Об'єкти, які є значеннями змінної тоді і тільки тоді, коли $P(x)$ істинне, або об'єкти, які відповідають умові $P(x)$, утворюють область визначення змінної. Так, область визначення змінної у пропозиційній функції $\sin(x)=0$ є область чисел $0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi$ і т. д. Тут, власне, треба було б уточнити, що йдеться про індивідну змінну — в наведеному прикладі предикат є константа. Але, взагалі кажучи, у пропозиційній функції $P(x)$ є два роди змінних: індивідна змінна x та предикатна змінна $P(\)$, на місце якої можна написати якийсь конкретний предикат, наприклад, $\sin(\)=0$ або *синій* ($\$).

Такі речення, як *Іван старший за Петра, 3 більший ніж 2* тощо, можна розглядати аналогічно: «старший за Петра» є властивість Івана, тобто предикат, «бути більшим, ніж 2» — властивість цілого ряду чисел, зокрема числа 3. Речення такої структури, тобто твердження про наявність певних відношень, можна розглядати як особливий вид речень.

Будемо вважати, що в загальному випадку твердження про певне відношення має структуру

$$x \dots y,$$

де на місце x, y підставляються назви індивідних об'єктів, на місце крапок — назви відношень. Згідно з прий-

нятою формою запису будемо ставити попереду знак предиката, в дужках — змінні: $P(x, y)$ у випадку, коли йдеться про відношення двох об'єктів, $P(x, y, z)$ — трьох об'єктів тощо, розрізняючи таким чином одномісні, двомісні, тримісні й т. д. предикати, або сингулярні, бінарні, тернарні й т. д. пропозиційні функції. Отже, одномісний предикат виражає властивість, n -місний при $n > 1$ — відношення.

Повертаючись до наведених вище прикладів відношень, ми можемо помітити таку обставину. Бути старшим за Петра — це певна властивість, і, отже, «старший за Петра (x)» — пропозиційна функція (одномісний предикат). Але просто вираз «бути старшим» — це не властивість, такий вираз не має смислу без вказівки на те, що хтось старший за когось, без вказівки на змінні. Отже, вираз «старший за $y(x)$ » — це не пропозиційна функція. Іншими словами, двомісний предикат можна перетворити на одномісний, якщо замість однієї із змінних ми поставимо назву цілком визначеного об'єкта, так, щоб вираз «старший (x, y)» перетворився на вираз «старший за Петра (x)». Більш загально кажучи, якщо в n -місному предикаті ми замінимо m змінних назвами визначених об'єктів, то одержимо $n-m$ -місний предикат. А якщо ми замінимо назвами визначених об'єктів усі n змінних — наприклад, в одномісному предикаті єдину індивідну змінну? Одержаний таким чином «нуль-місний» предикат перетвориться на пропозиційну змінну: в ньому ми не можемо робити ніяких підстановок замість підмета і, отже, ігноруємо структуру речення, розглядаючи його як ціле.

У численні предикатів використовуються два знаки логічних операцій, які звичайно не вживаються в численні речень: квантор загальності — великий « \forall » і читається «для

всіх...) і квантор існування — малий квантор (позначається знаком « \exists » і читається «існує такий..., що...»). Так, вираз: $(\forall x)F(x)$ — читається «для всіх x $F(x)$ » («для всіх x справедливо $F(x)$ »), або «кожен x має властивість $F(x)$ ». Вираз: $(\exists x)F(x)$ — читається «існує такий x , що $F(x)$ » («для деяких x справедливо $F(x)$ »).

Тут вжито символіку, запропоновану Б. Расселом (\forall — це перевернута перша літера слова All — всі, \exists — відповідно слова Exists — існує). Застосовують також символіку Д. Гільберта, яка відрізняється лише записом великого квантора: (x) пишеться замість $(\forall x)$. Іноді квантори позначаються грецькими літерами Π (знак добутку — великий квантор) та Σ (знак суми — малий квантор).

Справа в тому, як помітив ще один із фундаторів математичної логіки Ч. Пірс, слово «всі» можна вважати скороченням кон'юнкції речень, а саме

$$(\forall x)P(x) \text{ означає } P(x_1) \cdot P(x_2) \cdot \dots \cdot P(x_n);$$

відповідно слово «деякі» і квантор існування можна вважати скороченням диз'юнкції:

$$(\exists x)P(x) \text{ означає } P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n).$$

Але такий спосіб введення кванторів виходить із припущення, що в область визначення змінної x входить скінченне число об'єктів. Як добре розумів сам Пірс, зовсім не завжди ясно, чи це так, і не можна пов'язувати всю побудову логіки з таким сильним припущенням.

Введення кванторів зобов'язує нас зробити доповнення до числення речень. Формулами числення предикатів є пропозиційні змінні, пропозиційні функції без кванторів і з кванторами, все, що говорилося у численні

речень, залишається справедливим для формул числення предикатів. Труднощі виникають остільки, оскільки доводиться формулювати закони для операцій кванторами; у зв'язку з цим числення предикатів називають також теорією квантифікації. Слід також мати на увазі, що крім індивідних змінних є ще й предикатні, які також можна брати під знак квантора. Вже в перших аксіоматичних побудовах числень предикатів їх автори Г. Фреге, Е. Шредер, Б. Рассел неявно вводили вимогу спочатку побудувати теорію квантифікації індивідних змінних, а потім «надбудувати» над нею теорію квантифікації предикатних змінних. У 1928 р. Д. Гільберт і В. Аккерман ввели терміни «вузьке функціональне числення» та «розширене функціональне числення», а пізніше Д. Гільберт і П. Бернайс — терміни «вузьке числення предикатів» та «числення предикатів другого порядку».

Розглянемо спочатку вузьке числення предикатів, або функціональне числення першого порядку — теорію квантифікації для індивідних змінних.

АКСІОМАТИЧНА ПОБУДОВА ЧИСЛЕННЯ ПРЕДИКАТИВ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Для того, щоб побудувати числення предикатів, необхідно підібрати відповідну аксіоматику числення речень і додати до неї правила виведення й аксіоми, необхідні для оперування з кванторами. Так, до певної аксіоматики числення речень можна додати два додаткових правила виведення:

- (1) $A \supset P(y) \vdash A \supset (\forall x) P(x)$
- (2) $P(y) \supset A \vdash (\exists x) P(x) \supset A$

і дві додаткові аксіоми:

$$(1) (\forall x)P(x) \supset P(y)$$

$$(2) P(y) \supset (\exists x)P(x).$$

Техніка виведення у численні предикатів залишається такою самою, як і в численні речень.

Отже, побудовано логістичну систему, яка вже істотно відрізняється від числення речень: вона дозволяє розрізняти індивіди, властивості і відношення, вживати вирази *всі* і *деякі* (*існує*). Належність усіх цих виразів до логічної термінології не викликає сумнівів. Ніяких спеціальних математичних припущень ми не висували і начебто можемо бути упевнені, що після формулювання вузького числення предикатів продовжуємо знаходитися в межах «чистої логіки».

Яким би незначним не здавалося розширення мови у численні предикатів порівняно з численням речень, воно істотно змінює властивості нової логічної теорії.

У численні речень ми мали справу лише з двома об'єктами: істиною і хобою. В численні предикатів пропозиційні змінні і функції також зіставляються з даними об'єктами. Але у нас ще з'явилися й індивідні об'єкти, позначуванні індивідними змінними, і проблема істинності формул числення предикатів істотно пов'язана з цією обставиною.

У численні предикатів можна побудувати матрицю не лише для пропозиційної змінної, але й для кожного предиката.

Так, одномісний предикат *просте число* (x), який надалі скорочено записуватимемо $Pr(x)$, матиме таку матрицю:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$Pr(x)$	X	I	I	I	X	I	X	I	X	X	X	I	X	I	...

Відношення $x \in$ дільник y , тобто двомісний предикат $\text{Діл}(x, y)$, матиме матрицю:

$x \setminus y$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
1	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	...
2	X	I	X	I	X	I	X	I	X	I	X	I	...
3	X	X	I	X	X	I	X	X	I	X	X	I	...
4	X	X	X	I	X	X	X	I	X	X	X	I	...
5	X	X	X	X	I	X	X	X	X	I	X	X	...

Якщо вважати кінцевим число об'єктів, що входять у область визначення x , то проблема розв'язання формул числення предикатів одразу стає тривіальною. Справді, тоді можна вважати великий квантор кон'юнкцією $P(x_1) \cdot P(x_2) \cdot \dots \cdot P(x_n)$; малий квантор — диз'юнкцією $P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n)$; отже, можна замінити вирази з кванторами кон'юнкцією пропозиційних функцій, а ці останні в свою чергу пропозиційними змінними, і проблему розв'язання числення предикатів звести до проблеми розв'язання числення речень. Однак будь-яке припущення про кінцеву або безкінечну кількість об'єктів виходить за межі логіки. Можна, правда, твердити, що «звичайна» логіка має завжди справу з кінцевими величинами, а безкінечність — справа суто математична. Але хіба істинність виразу «всі кити — ссавці» залежить від того, скільки за історію Землі було і буде китів? Вирази з словом *всі* якщо і не містять твердження про безкінечність, то принаймні ігнорують проблему кінцевого і безкінцевого. Мова логіки повинна бути незалежною від тверджень природничо-наукового характеру, оскільки кінцевість чи без-

конечність світу не повинна впливати з самого факту вживання слова *всі*.

Беручи до уваги цю обставину, ми можемо уточнити поняття тотожно-істинної формули таким чином. Будемо називати формулу числення предикатів загально-значущою в даній області, якщо вона приймає значення «істина» при будь-якій підстановці конкретних предикатів замість предикатних змінних і будь-яких значеннях індивідів з даної області замість індивідних змінних. Будемо, далі, називати формулу числення предикатів універсально-загально-значущою, якщо вона загальнозначуща в будь-якій області.

Прикладом формули, загальнозначущої в області з одного індивіда, може бути

$$(\exists x) P(x) \supset (\forall x) P(x).$$

Вона перетворюється на тавтологію лише при одній умові: якщо є тільки один об'єкт x . Так, яку властивість планети Земля ми не позначали б предикатором P , тотожно-істинним буде речення:

Якщо існує планета Земля така, що вона має властивість P , то кожна планета Земля має властивість P .

Можна сформулювати твердження, які будуть тавтологіями для безконечної області визначення індивідної змінної і хибними для конечних областей.

Отже, самих лише матриць істинності недостатньо для того, щоб визначити, чи буде формула числення предикатів тотожно-істинною, чи ні. Це значно ускладнює проблему несуперечливості числення предикатів.

Чи несуперечливе числення предикатів, тобто чи не можна в ньому побудувати дві формули, загальнозначущі для певних областей і такі, що одна з них буде запереченням другої? Для розв'язання цього питання

скористаємось тим, що для області з одним індивідом загальнозначущою є формула $(\exists x)P(x) \supset (\forall x)P(x)$. А оскільки формула $(\forall x)P(x) \supset (\exists x)P(x)$ універсально-загальнозначуща, то можна сказати, що для області з одним індивідом тавтологією є формула

$$(\forall x)P(x) \equiv (\exists x)P(x).$$

Приклад з планетою Земля ілюструє ту обставину, що, грубо кажучи, квантори *існує* і *всі* тут просто зайві, і зміст тверджень $(\forall x)P(x)$ і $(\exists x)P(x)$ цілком адекватно виражається формулою $P(x)$. А формулу $P(x)$ можна замінити пропозиційною змінною, так що у випадку одного індивіда верифікація формули

$$(\exists x)P(x) \supset (\forall x)P(x)$$

зводиться до верифікації формули

$$p \supset p.$$

Іншими словами, для перевірки несуперечливості числення предикатів аналізується випадок, коли змінні замінено іменами цілком визначених індивідних об'єктів і таким чином n -місний предикат перетворено на нуль-місний, тобто на пропозиційну змінну. Отже, розглядаючи пропозиційну функцію, ми беремо до уваги не всю її матрицю (адже, наприклад, для предиката *Діл* (x, y) довелось би виписувати її безконечно довго!), а будь-який конкретний фрагмент її, утворений цілком визначеними індивідними об'єктами. Це дозволяє уникнути міркувань про безконечність і замінити пропозиційними змінними пропозиційні функції. Така основна ідея доведення несуперечливості числення предикатів. Якщо є певність у тому, що аксіоми та правила виведення не приводять до суперечності, то можна довести і те, що жодна теорема не робить систему супе-

речливою. Докази несуперечливості вузького, а також розширеного числення предикатів знайшли Д. Гільберт і В. Аккерман (1928), Ж. Ербран (1930) (незалежно від останнього — А. Тарський, Г. Генцен, а також Е. Бет).

Правда, наведені міркування не дають ніякої гарантії, що яка-небудь формула, загальнозначуща на безконечній області, виявиться несумісною з певними універсально-загальнозначущими формулами. Однак це не має нас серйозно турбувати. Справа в тому, що засобами вузького числення предикатів не можна побудувати формули, яка була б тавтологією на безконечній області і не була б загальнозначущою на будь-якій конечній області, тобто формулу, що виражала б властивість безконечності. Для цього потрібно мати поняття «клас» або «множина», а дані поняття з'являються лише у численнях предикатів другого і вищих порядків.

І хоча ми начебто проскочили між Сциллою конечного і Харібдою безконечного, за це доводиться платити досить дорогою ціною. За допомогою числення речень можна знайти для будь-якої формули відповідь на питання, чи є вона тотожно-істинна, тотожно-хибна чи здійсненна. У численні предикатів особливих труднощів немає доти, доки йдеться про конечні області визначення індивідних змінних. Однак ми не маємо права не зважати і на безконечні області. Якщо ж область визначення індивідної змінної безконечна, то не може існувати ніякої загальної процедури розв'язання для довільної формули (теорема доведена А. Черчем у 1936 р.).

Ця обставина не означає неповноти числення предикатів. Неважко показати, що якщо формула доведена в численні предикатів, то вона універсально-загальнозначуща. Можна також довести (К. Гедель,

1930), що коли формула універсально-загальнозначуща, то вона може бути доведена (тобто є теоремою). Відсутність загальної процедури розв'язання (саме про це йдеться у теоремі Черча) свідчить не про неповноту числення предикатів у згаданому смислі: якби можна було встановити, що довільна формула універсально-загальнозначуща, то тим самим непотрібно було б доводити, що вона є теоремою (це гарантує теорема Геделя про повноту числення предикатів). Справа саме в тому, що не існує загальної процедури перевірки для довільної формули, чи є вона загальнозначущою, чи ні. Доводиться шукати процедуру розв'язання для окремих видів формул.

Проте числення предикатів не є недоповнювальною логістичною системою: можна навести формулу, яка буде загальнозначущою (в певній області) і разом з тим не буде ні аксіомою, ні теоремою логістичної системи, наприклад формула для одного-єдиного індивіда.

ЧИСТІ І ПРИКЛАДНІ ЧИСЛЕННЯ ПРЕДИКАТИВ

Подальше збагачення мови логіки може здійснюватись двома шляхами.

Перший полягає в тому, що поряд з предикатними та індивідними змінними вводяться предикатні та індивідні константи. Таким чином з чистого числення предикатів одержують прикладні.

Найпростіше побудувати на основі числення предикатів математичну теорію — а саме теорію чисел — шляхом додавання до вихідних символів числення предикатів таких символів:

— індивідного знака 0 (нуль);

— двомісного предиката $\dots = \dots$ ($x = y$ читається *x дорівнює y*);

— функції $S(x)$ (читається наступний за " x):
... + ... (читається ...плюс...); ... \times ... (читається
...раз по ...).

Всі ці поняття беруться з математичної практики, однак при побудові теорії немає потреби пригадувати все, що нам відомо про нуль, додавання, множення тощо. Засобами числення предикатів та за допомогою введених символів можна дати експлікацію введених понять, тобто виділити лише деякі їх властивості і зафіксувати їх у відповідних аксіомах.

От і все, що потрібно з самого початку знати про терміни, введені для побудови чистої теорії чисел, тобто теорії натуральних чисел без застосування засобів аналізу (наприклад, ірраціональних чисел або нескінченних рядів). В «чистій теорії чисел» розглядаються лише скінченні множини (хоч би цих множин була безліч!); приєднання нескінченних множин як окремих об'єктів привело б до теорії дійсних чисел і тим самим до аналізу, а відповідно розширивши поняття «множина», можна було б прийти до теорії множин.

У прикладному численні предикатів, яким є чиста теорія чисел, індивідні об'єкти — числа — не будуються засобами логіки, а лише характеризуються засобами теорії. Вважається, що ряд індивідних об'єктів — 0, 1, 2, 3, ... — заданий; індивідна змінна набуває значення на цій області об'єктів. Назви індивідних об'єктів є терми. Функціональні константи $S(...)$, ... '+ ... , ... \times ... тим відрізняються від предикатів, що за їх допомогою з термів утворюються не речення, а нові терми, так що $x+y$ є терм — назва (невизначеного) індивідного об'єкта, тоді як $x=y$ є речення, що його значенням є «істина» або «хиба». Теорія, побудована на такій основі, цілком надійна (поки не вводяться поняття аналізу, тобто поки не оперують нескінченністю!).

Однак вона може не задовольнити того, хто бажав би більш послідовно вводити поняття на основі логіки.

Другий шлях полягає в тому, щоб обмежитись чи с т и м и численнями предикатів. Доповнимо числення предикатів константою $=$ і цим обмежимося (числення предикатів з рівністю ще вважається чистим). Властивості предиката $\dots = \dots$ можна експлікувати у вигляді аксіом або аксіомних схем, які так чи інакше виражатимуть закони рефлексивності, комутативності та транзитивності рівності.

У розширеному численні предикатів, де дозволяється під знак квантора брати не лише індивідні, а й предикатні змінні, є можливість не експлікувати властивості предиката $\dots = \dots$, а визначити його, ввівши рівність таким чином:

$x = y$ означає за визначенням $(\forall x)(\forall y)(\forall F)(F(x) \supset \supset F(y))$ (для кожного x , для кожного y і для кожного F , якщо x має властивість F , то й y має властивість F).

Відповідно

$x \neq y$ означає за визначенням $(\forall x)(\forall y)(\exists F \sim \sim (F(x) \supset F(y)))$ (існує така властивість F , що якщо x має цю властивість, то y не має цієї властивості).

Тепер властивості рівності немає потреби вводити як аксіоми — вони можуть бути доведені як теореми розширеного числення предикатів.

З певної точки зору доцільніше, жертвуючи простою побудов, піти шляхом поступового розширення логічних засобів; хоч чисте вузьке числення предикатів з рівністю не викликає заперечень у тих, хто хотів би дотримуватись великої строгості, все ж приємніше не брати поняття звідкись «збоку», а будувати їх на надійному логічному фундаменті.

Проте розширене числення предикатів містить надзвичайно важливу по суті добавку: зв'язуючи кван-

тором предикат, ми говоримо про властивість як про окремий об'єкт, а оскільки логіка має справу з об'ємами понять, а не з їх змістом, то тим самим ми неявно говоримо про клас предметів, які мають дану властивість. Таким чином, йдеться не лише про сині предмети або добрих людей, але й про синість або доброту як окремі об'єкти.

Цьому «по суті» слід надати явної форми, оскільки ми все ж не отожднюємо властивість з класом — адже знак предиката сам по собі, без знаків змінних, не має смислу. Треба, отже, ввести поняття «множина» («клас») і поняття «бути членом класу». Для цього потрібно мати в якомусь вигляді аксіому згортання, яка твердила б, що всі сутності, які мають дану властивість (задовольняють даній умові), утворюють множину (клас).

Символічно аксіома згортання може бути записана так:

$$(\exists y) (\forall x) [(x \text{ і } y) \equiv F(x)].$$

Знак \in («бути членом класу») визначається цією аксіомою.

Треба виразити також думку, що даний клас, утворений властивістю $F(\)$, є єдиний, оскільки два класи, які містять в точності одні й ті ж елементи, отожднюються. Це можна виразити в аксіомі об'ємності:

$$(\forall x) (\forall y) [((\forall z) ((z \in x) \equiv (z \in y))) \supset (x = y)].$$

Таким чином створено можливість будувати класи, маючи пропозиційні функції. Але разом з тим, як показали Б. Рассел і Е. Цермело, відкрито шлях для виникнення логічних парадоксів. Система розширеного числення предикатів, побудована на наведених вище аксіо-

мах без усяких обмежень «згортання» елементів у клас, логічно суперечлива.

Доводиться, отже, накладати якісь штучні обмеження на «згортання», а це зводить нанівець прагнення логічних пуритан ввести всі математичні поняття виключно на базі логіки. Цілком виправданим залишається шлях прикладних числень предикатів. Багато систем будується на прикладному вузькому численні предикатів з рівністю і двомісним предикатом $\dots \in \dots$ («бути членом класу»).

ОДНА ЛОГІКА ЧИ БАГАТО ЛОГІК?

ЛОГІКА І БЕЗКОНЕЧНІСТЬ

Лев Толстой писав про схильність до абстрактних міркувань, завдяки якій він юнаком «впадав у безвихідне коло аналізу своїх думок... Питаючи себе: про що я думаю? я відповідав: я думаю, про що я думаю. А тепер про що я думаю? Я думаю, що я думаю, про що я думаю... Ум за розум заходив...»

Для зрілого Толстого подібні питання були такими. «пропонування яких складає вищий щабель, якого може досягнути розум людини, але розв'язання яких не дане йому...» Цікаво, що приблизно те ж «я думаю, що я думаю...» і так далі до безконечності зовсім не лякало математичний розум — так, ґрунтуючись на подібних міркуваннях Б. Больцано (1848), Р. Дедекінд (1888) намагались довести існування нескінченних множин і вважали, що справились із цією задачею.

Образ безконечності збуджував уяву людей, він «постачав» логічні загадки, що їх розв'язання ніколи не було тривіальною справою. Так, наприклад, Г. Галілей відкрив такий парадокс безконечності. Випишемо в один рядок натуральний ряд чисел:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12...

Під кожним з цих чисел розташуємо його квадрат:

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144...

Оскільки натуральний ряд нескінченний і кожне число має свій квадрат, то в результаті ми одержимо ще один нескінченний ряд чисел. Між одержаними двома множинами чисел існуватиме одно-однозначна відповідність — з кожним елементом першої множини чисел можна зіставити елемент другої множини. Обидві множини, таким чином, еквівалентні. Але ж ясно, що до другої множини входить лише частина елементів першої множини — друга множина є власною підмножиною¹ першої множини!

Напрошується висновок, що тут має місце логічна суперечність. Принаймні якби йшлося про скінченні множини, суперечність була б явною. Але чому не вважати «парадоксальну» властивість нескінченного числового ряду саме істотною особливістю нескінченних множин? Адже можна просто вважати, що множини бувають нереклексивні (скінченні) і рефлексивні (еквівалентні власній підмножині, нескінченні), тобто рефлексивність множини вважати ознакою її нескінченності!

Саме так міркували Ч. Пірс і Р. Дедекінд; засновуючись на ідеях Б. Больцано, схожих на роздуми юного Толстого, Дедекінд спробував довести логічність безконечного.

Нехай t — будь-який об'єкт, що про нього я думаю. Всі такі об'єкти утворюють множину T . Нехай, далі, я думаю про t ; думка t є об'єкт думки, отже, очевидно, також є елементом множини T ; при чому вона відрізняється від t . Сукупність усіх виразів типу t є об'єкт думки, яку позначимо символом T^0 , є власною підмножиною T . З кожним елементом t множини T можна зіста-

¹ Власною підмножиною даної множини називається множина, утворена тільки з елементів даної множини і ні з яких інших елементів.

вити елемент t є об'єкт думки підмножини T^0 . Таким чином, підмножина T^0 еквівалентна множині T , тобто множина T рефлексивна, або нескінченна.

Здавалось би, все гаразд, ум за розум не заходить, ідея безконечності введена шляхом простих і логічно бездоганих доказів. Однак запропонований Дедекіндом спосіб міркувань, як виявилось, веде до тих самих логічних суперечностей, що їх породжує необмежене «згортання» властивості у клас.

Коротко сформулюємо суть справи. Множина — це сукупність певних елементів (якщо елементів немає, то маємо порожню множину). До елементів множини можна віднести і саму множину — зрозуміло, не завжди: множина всіх зірок не є зіркою, але можна множину сузір'їв розглядати як одне велике сузір'я.

Будемо розрізняти множини двох родів: 1) множини, що містять себе серед власних елементів, 2) множини, що не містять себе серед власних елементів.

Спробуємо відповісти на питання: до якого роду множин належить множина всіх множин, що не містять себе серед власних елементів? Будь-яка відповідь на питання є логічно суперечливою. Якщо множина всіх множин, що не містять себе серед власних елементів, відноситься до множин першого роду, то, отже, вона належить до множин, що містять себе серед власних елементів, що абсурдно. Якщо множина всіх множин, що не містять себе серед власних елементів, належить до цих останніх множин, то і тут одержується абсурдний висновок. Адже до другого роду належать множини, що не містять себе серед власних елементів. Якщо множина всіх множин другого роду сама належить до другого роду, то тоді вона містить саму себе серед своїх власних елементів!

Щоб легше було простежити за цими абстрактними міркуваннями, звернемося до прикладу, запропонованого

Б. Расселом. Нехай перукар голить тих і тільки тих жителів свого села, які не голяться самі. Чи голить він сам себе? Відповідь на це питання у будь-якому випадку буде суперечлива: адже коли перукар не голить сам себе, то він належить до тих жителів, яких повинен голити і, отже, голить сам себе: якщо ж він голить сам себе, то належить до тих жителів, котрих він не може голити і, отже, не голить сам себе.

Чи пов'язаний цей парадокс з ідеєю безконечності? Чи розкриває перед нами поняття «безконечність» безодню, що її нездатна осягнути «нормальна» людська логіка? Чи правий Кант, котрий намагався довести, що розум впадає в антиномії, коли прагне розв'язати проблему безконечності?

Докази антиномічності поняття безконечності, наведені Кантом, з сьогоденної точки зору до найвності нестрогі і, власне кажучи, доказами служити не можуть. Що ж сказала наука після Канта і після спроб Больцано — Дедекінда логічно обґрунтувати поняття «безконечність»?

Користуючись засобами числення предикатів другого ступеня, можна сформулювати одну з ознак безконечності, наприклад, властивість множини бути еквівалентною власній підмножині. Щоб записати таку властивість, не слід вживати ніяких математичних понять — досить дозволити зв'язувати кванторами предикатну змінну. Таку формулу можна вважати аксіомою (аксіомою нескінченності); приєднавши цю аксіому до певного формулювання розширеного числення предикатів, одержимо логістичну систему, яка характеризує (принаймні одну) нескінченну область і не характеризує жодної скінченної області. Тепер фатальна кантівська проблема набуває точного виразу: чи є не супереч-

ливою логістична система з аксіомою нескінченності?

На жаль, ніякої відповіді на це питання досі ми не маємо.

«Звичайні» парадокси типу наведеного вище парадокса Рассела не виникають у системах, де накладені певні обмеження на аксіому згортання. Можна також твердити, що прийняття аксіоми нескінченності не веде до «звичайних» парадоксів. Вдалося також довести, що несуперечливість теорії множин залежить принаймні не від самої лише аксіоми нескінченності: якщо математична теорія разом з деякими важливими аксіомами теорії множин виявиться несуперечливою, то приєднання до неї аксіоми нескінченності не привело б до суперечності.

Схожа ситуація виникає і при розгляді ідеї неперервності.

Уявляючи собі числа у вигляді точок на прямій, ми будемо наочний образ лінії, густо вкритої точками — між кожними двома точками можна вставити ще одну, і так далі до безконечності. Однак оскільки є ще нескінченно багато довжин, несумірних з даним масштабом, то, відобразивши ірраціональні числа на цій же прямій, ми одержали б нову множину точок, в нескінченну кількість разів більшу за множину всіх раціональних чисел. Яскравий наочний образ запропонував М. М. Лузін: «Якщо уявити собі раціональні точки чорними і непрозорими, а всі інші точки прозорими, то ми, ставши проти світла і тримаючи нашу пряму перед очима, побачили б, що скрізь пробиваються нескінченно тонкі промені світла, які пройшли крізь точки, відповідні до кінців відрізків, несумірних із прийнятою одиницею довжини»¹.

¹ Н. М. Лузин, Дифференциальное исчисление. М., 1949, стор. 18.

Цей образ змусив би, мабуть, із жахом схопитись за голову людину, що надто емоційно ставиться до проблем безконечності і неперервності: на прямій нескінченна кількість чорних непрозорих точок, і проте скрізь пробиваються промені світла! Та не забудемо, що це лише наочний образ, а в області високих абстракцій наочності вірити не можна. Суперечність наочності — це ще не логічна суперечність, не ознака безсилля логіки. Питання в тому, чи можна мислити логічно такі речі, як суцільна, неперервна лінія, виходячи з абстракції дискретних, відокремлених одна від одної точок? Чи можна логічно несуперечливо поєднати «абсолютно щільний» континуум точок (тобто геометричне уявлення) з арифметичним царством дискретних чисел, кожне з яких має неповторні властивості?

Ця проблема залишається нерозв'язаною. Континуум-гіпотеза, висунута свого часу Г. Кантором, не спростована і не доведена¹. Але К. Гедель довів, що коли метаматематична теорія несуперечлива без континуум-гіпотези, то приєднання її не зробить теорію суперечливою. А якщо приєднати не континуум-гіпотезу, а її заперечення? Потрібна була чверть віку, щоб одержати відповідь на це питання. У 1963 р. Р. Коен довів, що приєднання заперечення континуум-гіпотези теж не впливає на несуперечливість теорії і, таким чином, континуум-гіпотеза незалежна від основного змісту математики так само, як п'ятий постулат Евкліда — від решти аксіом геометрії.

Вияснення усіх питань, що впливають із зв'язку проблеми несуперечливості аксіоматичних теорій і аксіоми нескінченності та континуум-гіпотези, означало б

¹ У континуум-гіпотезі творця теорії множин Кантора йдеться (грубо кажучи) про багато «щільніший» континуум, ніж евклідів континуум раціональних та ірраціональних чисел.

ліквідацію кризи основ математики, та шляхи ліквідації цієї кризи поки що неясні.

Отже, правий чи неправий був Кант, твердячи, що розсудок, керуючись формальною логікою, не може мислити безконечності?

По-перше, необхідне одне уточнення. Засобами сучасної логіки і метаматематики розв'язувалось, власне кажучи, не те питання, яке ставив Кант. У німецького філософа йшлося про конечність чи безконечність Всесвіту. Приклад М. Лузіна з нескінченністю точок на числовій прямій наочно показує, що математичні твердження про безконечність є твердженнями не про реальний Всесвіт, а лише про математичні абстрактні об'єкти, в даному випадку про точки (звідси «нескінченно тонкі» світлові промені!). Жоден математик не прагне довести або спростувати тезу про те, що світ складається з абсолютно щільно упакованих точок; йдеться про сумісність властивостей нескінченних множин із законами логіки. Який зв'язок має це останнє питання із проблемою безконечності Всесвіту, ще потрібно вяснити.

По-друге, можна твердити, що ідея безконечності у тому вигляді, в якому вона властива «здоровому глуздові», ніяких небезпек формальній логіці не несе.

Як уявляє собі безконечність простору і часу «здоровий глузд»? Ми можемо пересуватися кілометр, два, десять, тисячу, світловий рік, мегапарсек і так далі в будь-якому напрямку, і ніщо не завадить нам зробити ще один черговий кілометр чи мегапарсек; ми можемо у думках повернутися назад у часі або заглянути вперед на рік, два, десять, мільйон, і змогли б так само в мільйонному році оглянутися назад або заглянути на рік вперед. Простір і час ніде не кінчаються, вони безконечні.

При цьому окремі відрізки простору і часу зіставляються з числами — елементами натурального ряду, і як

нескінченний натуральний ряд, так безконечно «тягнуть-ся» кілометри і роки.

Подібне уявлення повністю узгоджується з формалізованою теорією скінчених множин. «Чиста теорія чисел» оперує скінченими множинами, хоча при цьому цих множин може бути безконечно багато. У межах «чистої теорії чисел» нескінченність не є окремим об'єктом, нескінченностями не оперують. Припускається, що немає останнього натурального числа, але нескінченний натуральний ряд не став у «чистій теорії чисел» об'єктом розгляду як щось ціле. Грубо кажучи, в теорії множин ми можемо теж будувати нескінченно багато множин, але не можемо побудувати жодної нескінченної множини, поки не приймемо якусь аксіому нескінченності.

Абсолютно перевірена з логічного боку та ідея, що її Гегель назвав «поганою безконечністю». По суті, «погана безконечність» є ідея конечності, яка безконечно залишає поза рамками розгляду.

Теорія робить вирішальний крок саме тоді, коли вона розглядає нескінченну множину подібно до того, як розглядаються конечні області.

Отже, правий Кант — і, може, навіть правий Гегель, який твердив, що для аналізу «істинної безконечності» стара логіка безсила і потрібна нова логіка?

ЛОГІКА ДЛЯ БЕЗКОНЕЧНОГО?

Основи математики (метаматематика) розвивались у різних напрямках кількома школами, серед яких спочатку головними опонентами були формалісти та інтуїціоністи. Інтуїціоністи недовірливо ставилися не лише до математичних понять, пов'язаних із безконечністю, але й до самої логіки, за допомогою якої опоненти інтуїціоністів прагнули розв'язати спірні проблеми.

Власне, в цілому підхід до поняття безконечності у інтуїціоністів по суті не відрізнявся від підходу їх основних опонентів — формалістів. Саме лідер формалістів Д. Гільберт сформулював вимоги фінітизму, покладені в основу програми інтуїціоністів, а у нас, в СРСР, — школи конструктивістів. Джерело логічних суперечностей, з фінітистської точки зору, полягає не в оперуванні безконечними сукупностями, а в оперуванні ними так, наче вся безконечна сукупність дана нам одразу і цілком, «актуально», так, як і конечна сукупність. Притаманне класичній математиці розуміння безконечності як актуальної неприйнятне остільки, оскільки воно отожднює операції з безконечним і конечним. Фінітизм розглядає безконечне як потенціально здійснимо; якщо є можливість виконувати якусь математичну операцію (побудову) необмежено, то ми можемо абстрагуватись від обмеженої кількості паперу, чорнила тощо, від обмеженості строків людського існування і вважати, що дана побудова може бути продовжена до безконечності.

Однак у ставленні до логіки — а саме це нас тут цікавить — інтуїціонізм та конструктивізм зайняли позиції, радикально відмінні від позицій формаліста Гільберта. Для прихильників класичної логіки і математики, для фінітизму Гільберта логіка універсальна і застосовується як до конечного, так і до безконечного. Для інтуїціоністів логіка визначається об'єктом, до якого застосовується; а оскільки «звичайна» логіка створюється для судження про конечні сукупності, в математиці ж з самого початку об'єктом є безконечне, то математична побудова вимагає нові форми логіки. Конструктивізм вносить до цієї позиції істотну поправку: він рішуче заперечує, що математика з самого початку має справу з безконечністю. Безконечне вводиться в математику за допомогою абстракції: коректне введення безконечного

за допомогою абстракції потенціально здійснимого вимагає логічних засобів, відмінних від засобів класичної логіки.

Спочатку інтуїціоністи не робили ніяких спроб сформулювати основи нової логічної системи, оскільки вони в принципі, ґрунтуючись передусім на інтуїції математика, заперечували шлях виведення математики з якоїсь логічної схеми. Тим часом у 1925 р. А. М. Колмогоров висунув ідеї побудови нової формально-логічної системи; керуючись ними, В. М. Гливиенко через три роки побудував логічне числення, що задовольняє інтуїціоністські вимоги. У 1930 р. інтуїціоністська логіка у формалізованому вигляді представлена одним із лідерів інтуїціонізму — голландським математиком А. Гейтінгом. Зараз існує кілька еквівалентних інтуїціоністських логістичних систем; Г. Генцен побудував теорію виведення як для класичного, так і для інтуїціоністського випадку.

Коментувати підсумки багаторічної дискусії між інтуїціоністами, конструктивістами, формалістами та прихильниками інших програм в математиці немає ні смислу, ні можливості. Та одна проблема не може нас не хвилювати з філософської точки зору. Чи не довела історія науки на прикладі інтуїціоністської та конструктивної логіки залежність вибору логіки від предметної області дослідження? Йдеться, звичайно, не про непридатність формальної логіки до розв'язання метаматематичних проблем: інтуїціоністська логіка — теж формальна логіка, але інша логіка, ніж класична.

Передусім слід уточнити, коли можна говорити «одна і та ж логіка», а коли — «різні логіки».

Формальна логіка є теорією, що дозволяє встановити, яку послідовність речень можна назвати доказом, або логічним слідуванням, тобто є теорією

доказу. Логічна теорія прагне дати поняття доказу, тобто засоби, за допомогою яких для кожної правильно побудованої формули можна визначити, чи є для неї доказ у даній теорії. Цю мету, як зазначалось вище, можна досягти не у всякій логічній теорії, але це вже справа повноти поняття доказу.

Що означає «дати поняття»? Можна підійти до цього питання з боку об'єму поняття і з боку змісту поняття.

Об'єм поняття є сукупність об'єктів, що охоплюються відповідним поняттю терміном. З точки зору об'єму різні аксіоматичні формулювання класичного числення речень або формулювання їх за допомогою методу припущень (системи генценівського типу) дають одне поняття доказу — адже вони еквівалентні, тобто кожна доведена формула однієї системи є доведеною формулою будь-якої іншої системи. Те ж саме стосується класичного числення предикатів. Можна міняти добір аксіом чи аксіомних схем, формулювання правил виведення; можна обійтись без аксіом лише правилами виведення, як в системах генценівського типу — ми одержимо одне поняття доказу і одну логіку в різних формулюваннях.

Можна розрізнити поняття і тоді, коли об'єм їх однаковий, але різний зміст (тобто коли різні ознаки, за якими об'єкти об'єднуються в одну сукупність). Правда, математика і класична логіка прагнуть залишатись на об'ємній (екстенсіональній) точці зору, але ніщо не заважає нам стати і на змістовну (інтенсіональну) точку зору.

З інтенсіонального боку поняття доказу будуть розрізнятись остільки, оскільки істотними є ознаки, за якими доведена формула відрізняється від недоведеної (або спростованої). Отже, неважко показати, що з інтенсіональної точки зору вже у рамках класичного

числення речень або числення предикатів можна побудувати різні поняття доказу, тобто різні логіки.

Проте, якщо інтенціональний підхід у математика і логіка може викликати деякі заперечення, то різниця інтуїціоністського і класичного поняття доказу не викликає ніяких сумнівів з екстенціонального боку: інтуїціоністські системи не еквівалентні класичним, не всяка формула, що може бути доведена в класичній логіці, може бути доведена в логіці інтуїціоністській. Наприклад, в інтуїціоністській логіці не доводиться формула $p \vee \sim p$, що в класичній логіці є законом виключеного третього, відомим з Аристотелевих часів. Інтуїціоністська і класична логіки — різні логіки.

Можна з певністю твердити, що різниця цих логік полягає у підході до поняття «безконечність».

Логічна теорія -- повторюємо — прагне визначити поняття доказу, тобто множину всіх доведених формул. Інакше: логічна теорія являє собою визначення смислу термінів «і», «або», «не» і так далі, тобто констант, яких вжито для побудови теорії. Адже при побудові теорії зовсім не враховується зміст речень і беруться до уваги лише властивості логічних констант (операторів і функторів), які визначаються відповідно підібраними аксіомами. Можна твердити, що властивості знаків \cdot , \vee , \sim тощо характеризуються сукупністю аксіом і теорем (цілком достатньо, правда, для їх характеристики задати аксіоми). Після інтерпретації логістичної системи на об'єктах «істина» і «хиба» можна вважати, що властивості логічних знаків задані матрицями істинності. Щоб бути точним, слід говорити, правда, не про визначення, а про експлікацію або уточнення смислу логічних зв'язок — адже слова «і», «не» тощо ми беремо з їх готовим значенням ззовні, із «звичайної» мови, і лише відповідно експлікуємо для потреб логічної теорії.

Інтуїціоністська і конструктивна логіка відрізняються від класичної саме характером експлікації логічних знаків. Цілком зрозуміло, що зміст слова «всі» залежить від того, як ми розуміємо заданість «всіх» об'єктів у випадку безконечної їх множини: як актуальну заданість одночасно всієї безконечної сукупності чи як потенціальну здійснимість певної операції над кожним об'єктом. Те ж стосується слова «існує»: з інтуїціоністської та конструктивної точки зору «існує» є синонімом терміна «може бути побудований».

Інтуїціонізм інакше розуміє заперечення, або слово «не». Якщо об'єкт існує, то це означає, що його можна побудувати; якщо об'єкт не можна побудувати, тобто невідомі засоби, за допомогою котрих було б доведено його існування, то звідси ще не випливає, що факт існування такого об'єкта спростовано! За виразом Гейтінга, тут вводиться різниця між «фактичним» та «математичним» запереченням. Твердження математики можна виразити в такій формі: «Я виконав у думці математичну побудову A ». «Фактичне» заперечення, формалізоване класичною логікою, звучало б так: «Я не виконав у думці математичну побудову A ». З таким запереченням інтуїціонізм не погоджується. Слово «не» повинно означати лише «математичне» заперечення, яке мало б таку форму: «Я виконав у думці побудову B , яка приводить до суперечності твердження, ніби можна довести до кінця побудову A ».

Різниця у розумінні заперечення виявляється вирішальною. У тій частині, де у формулах класичної та інтуїціоністської логіки не вживається знак заперечення (\sim), різниці між обома логіками не існує.

Твердження, ніби доказ скрізь є доказом, незалежно від того, що доводиться, і вибір логіки залежить від предметної області її застосування, можна зустріти в

деклараціях інтуїціоністів. Та до них слід ставитися обережно. Адже за своїм змістом інтуїціоністська логіка не так уже й відрізняється від класичної.

Насамперед, в інтуїціоністській логіці не можна сформулювати твердження, що суперечили б класичним. Хоча деякі твердження класичної логіки не є законами інтуїціоністської (наприклад, класичний закон виключеного третього), це не означає, що заперечення якихось законів класичної логіки (приміром, заперечення закону виключеного третього) є законами інтуїціоністської логіки. У цьому розумінні обидві логіки не приходять до протилежних результатів.

Більше того. Як зазначалось, в інтуїціоністській логіці вирази мають дещо інший смисл, ніж у класичній; там інакше розуміється ряд термінів — «не», «існує». Якщо врахувати цю поправку на смисл вихідних знаків, то виявляється, що зміст інтуїціоністської логіки набагато ближчий до змісту класичної логіки, ніж це здається з першого погляду!

Ще 1932 року А. М. Колмогоров дав інтерпретацію інтуїціоністської логіки, яка дозволила зіставити її з логікою класичною. За Колмогоровим, пропозиційні змінні можна інтерпретувати не як речення, а як задачі. Тоді істинність формули означає, що задача доведена, хибність — що задача спростована (виходячи з того, що формула істинна, ми прийшли до суперечності). Формули, побудовані за допомогою логічних функторів, відповідно означають такі задачі:

— заперечення $\sim p$: прийнявши p розв'язаним, прийді до суперечності.

— кон'юнкція $p \cdot q$: розв'яжи задачу p і розв'яжи задачу q .

— диз'юнкція $p \vee q$: розв'яжи задачу p або розв'яжи задачу q .

— імплікація $p \supset q$: зведи розв'язання задачі q до розв'язання задачі p .

При такому розумінні закон виключеного третього не може бути прийнятний тому, що він означав би: будь-яку задачу можна або розв'язати, або, прийнявши її за вирішену, прийти до суперечності. Іншими словами, інтуїціоністське неприйняття закону виключеного третього у перекладі на «класичну мову» означає твердження про відсутність універсальної процедури розв'язання для будь-якої задачі. Відповідна теорема була доведена А. Черчем через кілька років після публікації статті А. М. Колмогорова.

Отже, в даному випадку різниця логік означає передусім відмінність вимог, які ставляться до прийняття певних математичних побудов. «Класики» не без підстав звинувачують інтуїціоністів та конструктивістів у тому, що вони звичні математичні поняття формулюють незвичним і дуже складним способом. З іншого боку конструктивісти та інтуїціоністи не без підстав закидають «класикам» некритичне засвоєння деяких тверджень, сумісність яких із вимогами фінітизму дуже сумнівна. По суті вже йдеться не про логіку, а про те, доцільно чи не доцільно перебудовувати всю математику, ґрунтуючись на високих вимогах несуперечливості. Класична точка зору полягає насамперед у прагненні зберегти основні завоювання класичної математики; конструктивна та інтуїціоністська точка зору вимагає рішучого звільнення від сумнівних абстракцій. Чи буде плідним конструктивістський пуризм, чи наука залишиться сукупністю несуперечливих фрагментів, пов'язаних між собою досить сумнівними засобами, — це вже справа не філософії і логіки, а математичної практики.

Починаючи з двадцятих років нашого сторіччя кількість новостворюваних логік невпинно зростає і виявляється, що кожна з них знаходить собі якусь сферу дії. Ця обставина часто коментується як доказ залёжности логіки від предмета її застосування. При цьому частина коментаторів виходить із суб'єктивно-ідеалістичних поглядів на логіку як чисту умовність, результат вільної конвенції, вибір котрої залежить тільки від зручності для вжитку. Думку про залежність вибору логіки від області її використання підхопила і частина матеріалістів, вбачаючи в цьому ще один аргумент проти кантіанського апіоризму, ще одну ілюстрацію того, що метод дослідження визначається природою змісту.

Наскільки обгрунтоване таке твердження?

Насамперед слід, хоча б дуже побіжно, сказати, в якому напрямку розвивається диференціація логік.

Можна, мабуть, виділити кілька джерел, з яких виникла тенденція до диференціації логік. Одним із них були так звані парадокси матеріальної імплікації.

Ще тоді, коли тільки-но розпочинався бурхливий розвиток сучасної формальної логіки, Б. Рассел висунув припущення, що поняття матеріальної імплікації є цілком коректним формальним описом логічного слідування. Ця теза, однак, викликала сумніви: адже матеріальна імплікація залишається істинною і тоді, коли антецедент її хибний, а консеквент істинний. Наприклад, речення «якщо сніг чорний, то двічі два — чотири» істинне з точки зору визначення матеріальної імплікації, в той час як з точки зору «здорового глузду» таке речення ніяк не можна ототожнити з логічним слідуванням. У класичній логіці можна побудувати цілий ряд подібних формул, «парадоксальних» з точки зору нашої інтуїції

(слово «парадоксальний» ми беремо в лапки, бо, власне кажучи, до внутрішніх суперечностей у логічній теорії такі формули не ведуть і тому парадоксами у власному розумінні їх назвати не можна).

Спроби усунення таких «парадоксальних» формул із логічних систем породили велику літературу, початок якої поклала праця К. Льюїса (1918). Характерною рисою логічних теорій цього типу є введення нових логічних операторів — *необхідно і можливо*, або модальних операторів, за допомогою яких вводиться поняття «строкої імплікації». Льюїс побудував декілька систем де відсутні парадокси матеріальної імплікації, зате з'являються не менш сумнівні «парадокси строгої імплікації». Більш коректну систему модальної логіки створив В. Аккерман, її удосконалили А. Андерсон та Н. Белнап.

Іншим джерелом були праці видатного польського логіка Я. Лукасевича. Лукасевич прийшов до ідей модальної логіки, намагаючись розв'язати ряд проблем, поставлених ще Арістотелем. Зокрема, стародавнього філософа хвилювало питання: чи не порушується закон несуперечності в таких, наприклад, твердженнях про майбутні події, як «можливо, морська битва відбудеться завтра» і «можливо, морська битва не відбудеться завтра»? Для опису таких міркувань Лукасевич створив модальну логіку, характерною рисою якої була багатозначна матриця істинності. У першій модальній системі Лукасевича (1920) логічні операції були визначені тризначною матрицею, в системі 1953 р. — чотиризначною. У тризначному варіанті до істиннісних значень належать поняття «істинно», «хибно» і «можливо»: запереченням істини є хиба, запереченням хиби — істина, запереченням можливості — можливість. Відповідно змінились матриці і для інших конекторів. У системі 1953 р. є вже

два поняття можливості. Лукасевич висунув також ідею n -значної логіки при довільному n .

До ідеї n -значної матриці при будь-якому (в тому числі — безкочечному) n прийшов, виходячи з абстрактно-математичних міркувань, американський математик Р. Поста приблизно тоді ж, коли й Я. Лукасевич. Ідеї Поста одразу знайшли алгебраїчну інтерпретацію. Багатозначні матриці почали використовуватися в різних логічних побудовах; виявилось, що інтуїціоністська логіка теж вимагає тризначної матриці, хоча ця матриця має інший вигляд, ніж у Лукасевича (у Гейтінга запереченням можливого є хибне).

Тут згадані лише деякі напрямки розвитку логічних теорій, пов'язані з найпринциповішими проблемами та розв'язаннями — проблема логічного слідування, багатозначність істиннісних матриць, введення нових модальних операторів. Можна було б згадати ще й розвиток «логіки індукції» та «імовірнісної логіки» (на базі теорії імовірності). Немає ніякого сумніву, що перед нами — різні логіки, різні поняття доказу.

Цікаві результати одержано за останні роки в нашій країні. О. О. Зінов'єв побудував теорію логічного слідування, яка не тільки не породжує «парадоксів» матеріальної чи іншої імплікації, але й взагалі будується повністю на «некласичних» основах. З погляду Зінов'єва, істотною вадою систем типу Аккермана є та обставина, що вони надто складні, оскільки базуються на уявленнях класичної двозначної логіки і лише намагаються усунути її недоліки шляхом, так би мовити, де поточно-го, а де й капітального ремонту. Одним із проявів цієї обставини є постійне змішування логічного слідування з якимось видом імплікації, тоді як слідування взагалі не визначається як логічна операція (знак \vdash не визначається, як знаки \supset або \vee , через істиннісні значення

змінних). Свою систему Зінов'єв буде з самого початку як багатозначну логічну систему, в якій розрізняється суб'єктно-предикатна структура речення, заперечення речення як цілого і заперечення предиката («внутрішнє» і «зовнішнє» заперечення), вводиться поняття «сильного слідування» і «слабого слідування» і лише як особливий випадок, результат особливих припущень з'являється теорія «квазіслідування», що збігається з класичною логікою.

О. Ф. Серебренніков висвітлює питання з іншого боку. Він дав інтерпретацію проблеми слідування, при якій так звані парадокси матеріальної імплікації не мають нічого «парадоксального»; «парадоксальність» подібних формул полягає в їх тривіальності, і слід тільки відрізнити тривіальні висновки від нетривіальних.

Повернемося, отже, до питання: якою мірою всі ці шукання і розв'язання спростовують уявлення про універсальність логіки?

Передусім нагадаємо, що будь-яка логічна теорія прагне дати поняття доказу. Природно розрізнити наукове поняття про реальність від самої реальності. Подібно до Журдена, який досить пізно дізнався, що розмовляє прозою, всі люди щось доводять у своєму житті, але лише деякі з них дізнаються, що існують правила «модус поненс» і правило підстановки. Наша інтуїція не приймає твердження про те, що видів доказу так багато, як і видів людської діяльності: все-таки що доведено, то доведено — незалежно від того, чи здійснювався доказ у математиці, біології, історії чи кулінарній справі. Можна, отже, припустити, що скрізь здійснюється одна й та ж процедура — назвемо її Доказом, або Логічним Слідуванням (з великої літери). Цей Доказ описується різними теоріями, внаслідок чого існує безліч теорій і понять Доказу.

Але чи можна було б довести таке припущення? Очевидно, для цього слід було б сформулювати універсально-значущу, універсально-застосовну Теорію Доказу

Припустимо, що можна побудувати Теорію Доказу (Логічного Слідування), позбавлену недоліків усіх існуючих систем. Але чи було б поняття доказу, визначене цією Теорією, універсальним в тому розумінні, що визначені ним теореми (доведені формули) були б знаряддям універсального вжитку, ідеальним засобом розв'язання проблем у всіх галузях людського знання? Дуже й дуже сумнівно. Очевидно, різні галузі знання вноситимуть поправки в таку Теорію Доказу, тому її не можна називати універсальною:

З іншого боку, наявність багатьох логік (понять доказу) не суперечить припущенню про існування універсального Логічного Слідування, оскільки всі поняття доказу повинні бути сумісними: логіки не можуть висувати тверджень, що суперечили б одне одному. Зокрема, всі логіки повинні в якомусь граничному випадку узгоджуватися з класичною двозначною логікою, яка для більшості нових логічних систем залишається базовою. Не можна побудувати логіку, в якій порушувався б закон несуперечливості. Отже, підстав для заперечення універсальності Логічного Слідування немає.

Можна категорично твердити про незалежність вибору логіки від предметної області дослідження ось у якому смислі. Уявимо собі теоретика, який міркує таким чином: «Спочатку я вам визначу, виходячи з моєї теорії, що ми з вами будемо вважати доведеним, а потім я побудую теорію, в якій все буде доведено, якщо прийняти моє поняття про доказ». Подібна «теорія» була б явно суперечливою, оскільки містила б у собі порочне коло. Поняття доказу повинно передувати прийняттю теорії. Це вірно і щодо логічних теорій: адже такі теорії ство-

рюються для описання реального процесу слідування і якби вони не узгоджувались із нашим інтуїтивним уявленням про доказ (давали б результати, що суперечать цьому уявленню), їх слід було б просто відкинути.

Отже, вибір логічної теорії певною мірою залежить від області її застосування, проте всі вони повинні узгоджуватися одна з одною, і фундаментальні властивості Доказу не залежать від області дослідження. Формальна логіка універсальна тому, що не є ні загальним методом, ні методологією науки — вона лише формулює деякі однакові для всіх заборони, яких не можна порушувати.

ДІАЛЕКТИКА І ВИМОГА НЕСУПЕРЕЧНОСТІ

Проблема співвідношення формальної і діалектичної логіки і досі залишається дискусійною; для спроби розв'язання її у повному обсязі довелось би спочатку викласти діалектичну логіку, а потім порівняти її з формальною. Відзначимо тут одну важливу обставину, що її нерідко чомусь не беруть до уваги під час дискусій, а саме: формальна логіка має зовсім інший предмет дослідження, ніж діалектика як логіка.

Уточнимо, про яку діалектику йде мова. Розв'язуючи проблему співвідношення формальної логіки і діалектики, слід зупинитись на ідеалістичній діалектиці в німецькій класичній філософії, оскільки саме вона стала одним із джерел марксизму. Скористаємось прекрасним тактичним принципом В. І. Леніна: перш ніж об'єднуватися, слід розмежуватися.

Кант виходив з того, що розсудок неминуче впадає в логічні суперечності (антиномії), коли хоче охопити «речі в собі» — об'єктивну дійсність такою, яка вона є «сама для себе», а не «для нас». Гегель критикував

Канта за протиставлення об'єктивної дійсності «в собі» і усвідомленої людиною картини цієї дійсності.

Матеріаліст на стороні Канта проти Гегеля, коли Кант виступає проти ототожнення свідомості і об'єктивного світу. Матеріаліст на стороні Гегеля проти Канта, коли Кант говорить, що не можна пізнати «речей в собі», а Гегель твердить, що немає принципово непізнаваного. Матеріаліст знову ж таки на стороні Канта проти Гегеля, коли Кант твердить, що не можна одразу, одним актом пізнання охопити усього безконечного, досягти Абсолютної Істини.

Абстрагуючись від конкретних практичних можливостей, від конечності, обмеженості засобів пізнання у кожному конкретному випадку, екстраполюючи наші пізнавальні можливості на безконечний ряд поколінь, ми можемо сказати, що людина спроможна пізнати все. Кожен конкретний акт пізнання дає нам істину — і тут матеріаліст рішуче проти Канта, проти агностицизму. Більше того: кожна конкретна істина абсолютна — у певному відношенні, в певних межах. Але безконечність тому й безконечність, що вона ніколи не кінчається. Лише ототожнивши свідомість з об'єктивною дійсністю, можна твердити, що «осягнене неосяжне», що здобуто «абсолютну істину в останній інстанції». Користуючись математичними аналогіями, можна сказати, що в «конкретній істині» в нескінченне число разів менше інформації, ніж в «абсолютній істині». Кант був би правий, якби це давало підставу твердити, ніби кожна конкретна істина містить нуль інформації. Але ж множина раціональних чисел у нескінченне число раз «бідніша» множини ірраціональних чисел, хоч обидві нескінченні.

По суті і Кант, і Гегель прийшли до цілком слушного висновку: «світ у цілому» не можна охопити думкою, не пожертвувавши при цьому «нормальною» людсь-

кою логікою, принципом несуперечності. Але філософська інтерпретація цього висновку у них різна. Кант не наважувався відкинути формальну логіку, але прийшов до висновку про «нульову інформаційну цінність» кожної конкретної істини. Гегель твердив, що він охопив «світ у цілому», але для цього йому довелося заперечувати «нормальне» мислення з його принципом несуперечності. А оскільки «світ у цілому» для Гегеля є не що інше, як та ж свідомість, тільки не конкретна людська, а універсальний «абсолютний дух», «нічне» мислення, то звідси і випливає висновок: як логічно суперечлива думка про «світ у цілому», так (логічно!) суперечливий і сам цей світ, тобто «абсолютний дух». Тому істинна логіка, яка описує людське мислення і «абсолютний дух», є логіка з суперечностями, — діалектична логіка, несумісна з формальною логікою.

Таке розуміння діалектики, діалектичної логіки неприйнятне для матеріаліста.

Діалектик гегелівської школи міг би сказати: але ж людство, хоче воно чи ні, мислить безконечність і впадає в логічні суперечності, про що свідчить криза основ математики! Хіба довів хтось, що якби навіть вся математика була скрупульозно перебудована конструктивістами і поняття безконечності було скрізь введене строго фінітними методами, це гарантувало б науку як ціле від несуперечливості її побудов у майбутньому? Хіба не логічніше припустити, що сучасне природознавство, озброєне «необережною» класичною математикою з її легковажним ставленням до нескінченних множин, таїть у собі ще безліч неприємностей для формальної логіки з її принципом суперечності? Хіба, нарешті, лише в математичних побудовах ховається двоїстість і несумісність кінцевого і безкінечного, особливого і загального, речі і властивості, якості і кількості тощо?

Мислити — це діяти у відповідності з формальною логікою. Буяння фантазії, палка уява, незв'язані фрагменти свідомості — без цього немає науки, але тут немає ще і доказу.

Часом кажуть: дане положення не можна довести формально-логічно, але можна довести діалектично. У буквальному розумінні слова — це абсурд. Діалектична логіка неможлива як теорія, що існує поряд з формальною логікою для розв'язання тих же задач, тільки кращими методами. Власне кажучи, подібну «теорію» доказу можна мислити собі так: це «теорія», в якій через відсутність принципу несуперечності були б відсутні будь-які обмеження міркування. Поступово вводячи обмеження, можна було б одержувати різні логічні теорії. Це й була б «універсальна», гранично-загальна теорія виведення — настільки універсальна і настільки загальна, що вона б говорила надто багато і тим самим нічого не говорила.

Що означає вираз — «довести формально-логічно»? Це означає, по-перше, вивести якесь твердження лише з аксіом логічного числення. У цьому розумінні вже формалізована арифметика не повністю може бути «доведена формально-логічно»... Це, далі, означає — довести так, щоб доказ узгоджувався з вимогами формальної логіки (одного, зрештою будь-якого з логічних числень). Діалектик зобов'язаний доводити так, як і усі інші нормальні люди, інакше він просто пропонуватиме прийняти свої твердження на віру.

У досить поширеній свого часу концепції «діалектичних понять і умовиводів» це виступає особливо яскраво. Якщо поряд із «формально-логічними» поняттями і умовиводами є «діалектичні», то якими поняттями і умовиводами може бути обґрунтована (доведена) істинність діалектики? Безумовно, «діалектичними». А на якій

підставі ми повинні прийняти теорію «діалектичних умовиводів»? Безумовно, на підставі «діалектичної теорії». Ось і порочне коло.

Напівгегельянська концепція «діалектичного і формально-логічного доказу» принижує матеріалістичну діалектику як логіку і методологію науки. Діалектичну логіку вона ставить в один ряд із іншими логічними системами; складається враження, ніби діалектична логіка розв'язує ті ж завдання, що й формально-логічні теорії, тільки іншими засобами. Насправді ж однаково безглуздо чекати створення як діалектико-логічної теорії модальностей, так і діалектико-логічної теорії множин. Матеріалістична діалектика вступає в силу саме там, де виявляються обмеженими можливості формальної логіки — при аналізі філософських проблем у всьому їх обсязі. Які б не були результати логічного аналізу поняття безконечності, самі по собі вони нічого не скажуть ні про те, чи безконечний Всесвіт, ні про те, наскільки повно те чи інше поняття безконечності відображає об'єктивну реальність.

Матеріалістична діалектика може розглядатись як логіка саме остільки, оскільки вона є не теорією доказу, а філософією. Різниця саме у предметі дослідження: філософія у тій чи іншій формі аналізує проблеми відношення свідомості до об'єктивної реальності. Логіка як теорія доказу не має засобів для постановки цих проблем: вона оперує об'єктами думки, не цікавлячись, матеріальні вони чи ідеальні.

І все ж... Все ж певний відгук у формально-логічній проблематиці знаходить якщо не проблема «духа і тіла», то старі філософські проблеми, дуже схожі на ті, що їх розв'язання було присвячене життя не одного філософа. Але про це — у наступному розділі.

СТРУКТУРА МОВИ І СТРУКТУРА СВІТУ

ЛОГІЧНІ ПАРАДОКСИ ТА «СВІТОВІ ЗАГАДКИ»

Досить різноманітні проблеми «загрожують» нам виникненням парадоксів. Із часом ставлення до логічних парадоксів ставало все більш серйозним. Придумано багато ілюстрацій парадоксів, які можуть здатися простими логічними жартами. Такий, наприклад, Расселів «парадокс перукаря».

Не лише софісти у Стародавній Греції, але й мудреці Єгипту та Індії намагалися розв'язати подібні головоломки. Проте сьогодні ясно, що йдеться не про нещасного перукаря, який не знає, чи голитися йому, чи ні, а про зовсім інші, дуже серйозні речі. Не лише парадокси теорії множин мають структуру, аналогічну до структури давно відомих логічних згадок. Радянський фізик Б. Понтекорво знаходить аналогію між відкриттям парадоксів у теорії множин та тією ситуацією у фізиці, коли при вивченні β -розпаду виникла суперечність між звичним поясненням фактів і законами збереження, в результаті розв'язання якої було відкрито нейтрон. Аналіз парадоксальної ситуації в даному випадку, безумовно, привів до дуже вагомих практичних наслідків.

Проте можна твердити, що повністю ще не усвідомлено зв'язок логічних парадоксів із «світовими загадками», які віддавна хвилюють людство.

Насамперед згадаємо проблему, що, мабуть, звела зі світу не одного схоласта в епоху середньовіччя. Вона здається безглуздою, але варто до неї придивитись уважніше, оскільки за своєю логічною структурою ця проблема аналогічна проблемі множини всіх множин, що не є власними підмножинами. Теологи середньовіччя ніяк не могли розв'язати питання: чи може всемогутній господь створити камінь настільки важкий, що сам нездужав би його підняти? Якщо може, то тоді він не всемогутній; якщо не може, то й тоді він не всемогутній!

Звичайно, проблема розв'язується просто: всемогутнього господа не існує так само, як і вищезгаданого перукаря. Проте справа не тільки в бозі. Адже задачу можна переформулювати на цілком «земну» манеру, наприклад: чи може абсолютно всевладний деспот створити установи виконавчої влади настільки сильні, що сам змушений буде їм підкорятися? В історії людства було чимало деспотів, які поламали собі зуби об цю проблему. Йдеться про парадокс, пов'язаний із свободою волі та її обмеженням.

Цікаво, що схоласти намагались вийти із положення досить дотепно. Вони розрізняли два питання: чи дійсно певна річ *є* і *що* є дана річ, тобто розрізняли твердження про те, що річ *є* (існує) і твердження про те, *що* річ *є* (що вона собою являє). Ці два значення українського слова «що» передаються різними латинськими словами: *quod* і *quid*. За допомогою таких тонкощів схоласти намагались розв'язати проблему свободи волі бога: що речі *є*, існують — це залежить від його волі, *що* є речі, які їх властивості — це залежить від самих речей та їх оточення. Якщо вже річ *є*, вона веде себе згідно із своїми властивостями, згідно з тим, *що* вона *є*: на не дуже крутому схилі камінь лежатиме, а вода зі

схилу потече, бо така природа каменю і води. Але саме існування речі, сам той факт, що вона є, — це продукт волі божої. Бог вільно творить існування, все подальше — справа законів природи.

Подібні міркування можна в тому чи іншому вигляді зустріти в будь-якому сучасному неотомістському підручнику філософії. Неважко помітити, що воля божа в такому випадку залишається безробітною, оскільки їй не лише немає потреби в перебігу конкретних подій, але й саме виникнення каменю чи води може бути пояснене законами природи, тобто тим, що є речі. Згадаємо Лапласове: «Я не мав потреби у цій гіпотезі» — не лише для пояснення властивостей Землі, але й самого факту її існування немає ніякої потреби вдаватися до гіпотези про божу волю. Але якщо релігійні уявлення не можуть бути врятовані тонким розрізненням між *quod* і *quid*, то, з іншого боку, не можна зводити всього і до причинно-наслідкових зв'язків у розвитку природи, оскільки тоді парадоксального характеру набуває проблема свободи волі людини.

Справді, коли кожна подія в природі й суспільному житті необхідно з чогось впливає, то логічно вважати, що вся минула і майбутня історія Всесвіту є розгортанням сліпої необхідності, і майбутнє, у тому числі і майбутнє людства, здійснюється неначе за великим сценарієм — тільки цей сценарій написаний не богом, а природою. Ми повертаємось, таким чином, до певного формулювання лапласівського детермінізму, несумісного з уявленнями сучасного природознавства. Ще парадоксальніші висновки цієї метафізичної концепції щодо суспільного життя: адже аналізуючи біографію окремої людини, ми завжди могли б знайти пояснення того, чому кожного разу ця людина вчинила так, а не інакше. Виходить, що вибір рішення людиною —

це ілюзія, бо він є результатом дії якихось причин, що їх ще ми не знаємо і не знає сама ця людина, і ніякої вільної активності, ніякого перетворення світу людиною насправді не існує.

... І знову напрошується аналогія із зовсім іншої області, на цей раз — із області фізики.

Проблема, дуже схожа на згадану вище, обговорювалась у диспуті між Лейбніцем та священником Кларком. Кларк, відстоюючи точку зору Ньютона про абсолютність простору і часу і ґрунтуючись на Лейбніцевому законі достатньої підстави (що був певним формулюванням принципу універсальної причинності), намагався довести необхідність «божого втручання». Логіка міркувань у Кларка — як, до речі, і у Ньютона — була приблизно така. Припустимо, що простір — це щось на зразок колосального (точніше, безконечного) ящика без стінок. Рух тіл завжди можна відрізнити від спокою, оскільки тіла рухаються відносно «ящика», тобто абсолютного простору. Аналогічно час — це абсолютна тривалість без реального годинника. Приймемо, далі, Лейбніців принцип: усе мусить мати достатню підставу. Всі тіла рухаються у певних напрямках або знаходяться у спокої. Чому, на якій підставі, тіла у Всесвіті розташовані саме так, а не інакше, рухаються саме в цих, а не інших напрямках? Такою «останньою причинною», таким *quod*, яке тільки й може «завести годинника» механіки Всесвіту, Кларк вважав надприродне, тобто волю божу.

Лейбніц не заперечував існування творця, але бачив небезпеку необережного використання закону достатньої підстави: адже якщо бог виявиться останньою достатньою підставою всього сущого, то тоді йому, всеблагому, ніколи не уникнути відповідальності за моря пролтих сліз і крові, за страждання безвинних! Тому Лейбніц

не хотів покладати на бога рішення, прийняті без достатньої підстави. Виходячи з цих досить містичних міркувань, Лейбніц — великий вчений — висловлює здогад, блискуче підтверджений сучасною наукою. А чому, власне кажучи, ми повинні розрізняти напрямки руху тіл у просторі, спокій і рівномірно-прямолінійний рух, праве й ліве? Таке розрізнення логічне, коли ототожнити простір з ящиком безконечно великих розмірів, усередині якого все рухається. Але досить вважати, що простір — це лише певний порядок тіл або певне їх розташування, — й уся аргументація Ньютона—Кларка руйнується. Якщо немає ніякого абсолютного простору, то напрямки руху тіл, їх взаємне розташування, праву і ліву сторони можна встановити лише відносно чогось — зокрема відносно спостерігача.

Так народжується цілком сучасна ідея відносності. Можна також сказати, що це і цілком сучасна ідея симетрії. Коли різниця між правим і лівим, між напрямками «вгору» і «вбік» залежить не від абсолютного простору, а від системи відліку, то можна дати такий опис об'єкта, з якого не буде видно, чи він орієнтований направо, чи наліво, чи рухається вгору, чи вбік. Рух об'єкта відносно спостерігача (або спостерігача відносно об'єкта) можна подати як перетворення координат, внаслідок котрого об'єкт залишається тим самим, — змінюється лише спосіб його зображення. З точки зору Ньютона—Кларка ліве і праве можна розрізняти безвідносно до спостерігача, тобто абсолютно; визначеність правого і лівого, визначеність просторових напрямів взагалі є якраз тим самим *quod*, про яке писали схоласти. За Лейбніцем, ліве й праве, напрям у просторі — це те, за що бог або абсолютний простір не відповідають: можна описати напрям як лівий чи правий — об'єкт, що рухається, від цього не зміниться.

Німецький математик Г. Вейль вважав, що коли з об'єктом можна зробити щось таке, в результаті чого він залишиться тим самим, то це й означає, що він симетричний (точніше, симетричні закони його опису). Ідея відносності в цьому розумінні збігається з фундаментальною ідеєю сучасного природознавства — ідеєю симетрії.

Коментуючи точку зору Лейбніца, Вейль писав, що «випадковість є істотною особливістю нашого світу» і «закони природи не визначають єдиним способом той світ, який дійсно існує»¹. Він зазначав, що міркування про симетрію правого та лівого були чи не найважливішим джерелом ідеї Канта про апіорність просторово-часової інтуїції. Адже інших підстав для виділення правого та лівого, крім пізнавальних здатностей людини, Кант не зміг відшукати!

Уся ця купа проблем продемонстрована читачеві лише для того, щоб він уловив між ними певний зв'язок. Елемент і множина, свобода волі і необхідність, сутність і існування, детермінізм і випадковість, симетрія і асиметрія, абсолютність і відносність — хіба це не різні імена для тих самих Сцілли і Харібди, що раніше виступали як безконечність і кінечність, перервність і неперервність?

Кожен дослідник проблем безкінечного та неперервного мусить зважати на досягнення сучасної формальної логіки. Ну, а чи не може логіка допомогти в осмислюванні принаймні тих «світових загадок», які було згадано вище?

¹ Г. Вейль. Симетрія. М., 1968, стор. 56—57.

Специфічні труднощі, які вимагали тонкощів, подібних до схоластичного розрізнення *quod* та *quid*, виникли в логіці вже тоді, коли Г. Фреге була зроблена перша спроба побудувати основи математики на базі формально-логічного апарата.

Йдеться про двозначність виразів «значити», «мати значення». Що означає (яке значення має), наприклад, вираз x^2 , або *квадрат числа x* ? Правильними будуть такі відповіді:

— вираз x^2 означає, що число x треба помножити саме на себе;

— вираз x^2 має значення y , де y — певне число.

Так, 3^2 означає дію множення числа 3 самого на себе; з іншого боку, значенням виразу 3^2 є число 9, тобто певний математичний об'єкт. Коли йдеться про логіку, то пропозиційні змінні можна розглядати як імена (назви) речень, які означають щось конкретне («сьогодні холодно», «двічі два — чотири»). З іншого боку, пропозиційні змінні можуть мати два значення: «істина» і «хиба».

Щоб усунути непорозуміння, Фреге запропонував ввести розрізнення між іменем, смислом і значенням. Що таке ім'я — зрозуміло: це — знак, написаний на папері, звучання слова тощо, тобто якість матеріальне явище, що може служити для передачі інформації. Смысл — це те, що розумієш, коли сприйнято ім'я. Значення, або за сучасною термінологією, денотат — це об'єкт або річ, названа даним іменем. Так, вираз 3^2 є іменем об'єкта (числа) 9; якщо ми розуміємо, що таке «піднести до квадрата», то тим самим нам відомий смисл операції (дії), що їй відповідає знак ...².

Фреге постулював, що світ (включаючи математичну реальність) складається з двох родів сутностей: речей і функцій. Річ він розумів у найширшому значенні слова, як усе, що може бути назване, включаючи числа, столи, стільці, кентаврів, Пегасів тощо. Функція — це дія або операція, за допомогою якої одна річ (одні речі) співвідноситься з іншою річю (значенням). Так, дія піднесення до квадрату співвідносить число (річ) 3 з числом 9 (значенням): $3^2=9$. Окремим випадком функції є пропозиційна функція $P(x, y, z...)$, яка перетворюється на речення після підстановки констант замість змінних (точніше було б сказати — конкретних виразів замість індивідних та предикатних змінних: підставивши замість P вираз «дружать одне з одним», замість x, y та z — імена «Петро», «Павло», «Юрій», одержимо речення «Петро, Павло та Юрій дружать один з одним»).

Значенням пропозиційної функції є істина або хиба; смисл її — це те, що ми розуміємо, «коли читаємо речення».

Окремим випадком пропозиційної функції є сингулярна (одномісна) пропозиційна функція, тобто поняття — $P(x)$. Наприклад, поняття «добрий», «бути добрим» вживається у реченні, яке має загальний вигляд « x добрий», або, в логіко-математичному записі, «Добрий (x)». Значенням змінної x може бути ім'я конкретної людини (точніше, з погляду Фреге, сама ця конкретна людина). Значенням пропозиційної функції «Добрий (x)» буде істина, якщо x — ім'я доброї людини, або хиба, якщо x — ім'я людини недоброї. Отже, з цієї точки зору поняття — це (логічна) дія або операція, яка зіставляє об'єкти, поіменовані індивідними змінними та константами, з абстрактними об'єктами «істина» та «хиба».

Фреге показав, що розрізнення понять «значення» і «смысл» важливе в логіці остільки, оскільки, взагалі кажучи, логіка дотримується принципу: два імені, які називають одну й ту ж річ, можна замінювати одне одним. Так, у процесі логічного доказу ми замість якогось істинного виразу вживаємо будь-який інший істинний вираз, незважаючи на смысл цих виразів: тут істотно лише їх істиннісне значення.

Проте така заміна можлива не в кожному контексті, а лише в прямому (в прямій мові, наприклад). Замість речення «На небі з'явилась Вечірня зоря» можна сказати «На небі з'явилась Ранкова зоря», оскільки «Вечірня зоря» і «Ранкова зоря» — це лише різні імена одного й того ж об'єкта — Венери. Але не у всіх контекстах така заміна можлива. Кожна людина може сказати: «Я знаю, що Вечірня зоря — те ж саме, що Вечірня зоря». Але не кожен може з повним правом твердити: «Я знаю, що Вечірня зоря — те ж саме, що Ранкова зоря». Контексти типу прямої мови називають екстенціональними, контексти другого роду — інтенціональними. За теорією Фреге, в інтенціональних контекстах смысл стає тим об'єктом, про який йдеться, а оскільки смысл виразів «Вечірня зоря» і «Ранкова зоря» різний, то в інтенціональних контекстах ці вирази стають іменами різних об'єктів і перестають бути взаємозамінними.

Теорія Фреге не є єдиним виходом із положення: можна користуватись іншими поняттями і створити іншу систему запобіжних засобів проти парадоксів, які виникають при необмеженій підстановці одних істинних виразів замість інших. Ввівши поняття «смысл» і «значення», Фреге по-своєму уточнив добре відомі традиційній логіці поняття «зміст і об'єм поняття». Та зроблені уточнення не є довільними у тому розумінні, що

труднощі, які привели до розрізнення змісту і об'єму, смислу і значення тощо, не залежать від особистої волі чи бажання теоретика-логіка чи математика.

Двозначність терміна «значення» проявляється в іншій формі у найфундаментальнішому понятті математики — «множина», яке теж ототожнюється (іноді — з деякими обмеженнями) з сингулярною пропозиційною функцією. Вище відзначалась складність узгодження двох аксіом теорії множин — аксіоми екстенціональності та аксіоми зведення. Аксіома екстенціональності вимагає, щоб два класи, коли вони містять одні й ті ж елементи, розглядалися як один і той же клас. У той же час аксіома зведення твердить, що елементи «зводяться» («згортаються», «стискуються») у клас на основі їх спільної властивості; отже, два класи, до котрих входять одні й ті самі елементи, слід, взагалі кажучи, розглядати як різні класи, коли вони утворені на основі різних властивостей.

Наприклад, чи тотожні клас членів профспілки на даному підприємстві і клас членів каси взаємодопомоги на тому ж підприємстві, якщо до обох класів входять одні й ті самі особи? З точки зору аксіоми екстенціональності — тотожні, з точки зору аксіоми зведення — ні.

Голландський логік і математик Е. Бет говорив, що по суті весь розвиток метаматематичних досліджень був пов'язаний з уточненнями і обмеженнями «згортання» елементів у множини з тим, щоб уникнути парадоксів. Неважко помітити, що розрізнення між смислом та значенням імені пов'язане з різним підходом до множини — то як до сукупності елементів, то як до спільної властивості цих елементів.

А тепер погляньмо на дивовижний збіг обставин. Якщо нам відомий денотат (значення) імені, але неві-

домній смисл, тобто відомо лише, що денотат існує, але невідомі його властивості, то це означає: ми не знаємо, що є денотат, але знаємо лише, що він є. Якщо нам відомий смисл, то ми знаємо, що він є. Денотат є функція смислу: знаючи властивості речі, ми, принаймні в ідеалі, знаємо, чи існує річ з такими властивостями. Отже, в якійсь формі тут відтворено схоластичне розрізнення *quid* і *quod*!

Розрізнення смислу і значення (денотата), у якій би формі воно не проходилося, настільки ж необхідне для несуперечливості логічних побудов, наскільки теологам конче потрібно було розмежувати сутність її існування. Це можна зрозуміти: адже йдеться про фундаментальні поняття, якими користується усе наше мислення — поняття «річ», «властивість» і «відношення».

Та чи рятує нас таке топке розрізнення двох значень слова «значити»? Чи не схоже становище логіки після прийняття припущень про два роди сутностей: речі і функції (властивості і відношення) — на становище схоласта, який лише на поверхні навів логічний порядок і загнав усі труднощі в глибину теорії?

Дійсно, концепція Фреге не позбавлена недоліків. Насамперед труднощі виникають у зв'язку з проблемою так званих порожніх імен. Оскільки кожне ім'я має значення (денотат), то імена неіснуючих речей також мають значення, а саме — порожній денотат. А оскільки, скажімо, «дракон» і «дружина мого знайомого Олексія Яковича» є однаковою мірою порожні денотати, бо Олексій Якович нежонатий, то звідси можна зробити висновок, що Олексій Якович одружений з драконом: адже дружина холостяка — це той самий об'єкт, що і дракон, тобто порожній денотат!

Обійтися ж без порожніх імен в логіці не можна так само, як у математиці — без порожніх класів.

Можна назвати багато інших труднощів, викликаних до життя самим введенням особливих об'єктів, як «значення» і «смісл».

Можливо, справа тут просто у властивостях тієї формалізованої мови, за допомогою якої речення «звичайної» мови перетворюються на такі штучні конструкції, як «Добрий (x)»?

Дійсно, для того, щоб можна було оперувати у логіці хоча б як прикладом реченнями «звичайної» мови, ми повинні спочатку надати їм штучної, громіздкої, незручної форми. Логіка, власне кажучи, не цікавиться конкретним змістом речень; вона припускає, що люди вміють розрізняти фрази осмислені («Чорна кішка спокійно спить») і неосмислені («Зелена ідея шалено спить»), можуть у кожному реченні визначити суб'єктно-предикатну структуру — уявляти, наприклад, речення «Сьогодні після обіду приїде Іван Іванович» як «Той, хто приїде сьогодні після обіду (Іван Іванович)». З усіх властивостей речення — стилістичної стрункості, образного строю, емоційної окраски, змісту тощо — логіка бере до уваги лише одне: говорить речення правду чи ні (істинне воно або ні).

Так, структура «звичайної» мови набагато складніша, ніж структура формалізованих мов, які будуються у формальній логіці. Формальна логіка знає просто відношення, тоді як у «звичайній» мові є засоби для виразу найрізноманітніших відношень просторових і часових, одиничного і загального, кількості і якості тощо. Але, абстрагуючись від великого числа особливостей «звичайної» мови, формалізована мова логіки саме з неї бере такі фундаментальні категорії, як «річ», «властивість», «відношення».

«НОМІНАЛІСТИЧНЕ» ТА «РЕАЛІСТИЧНЕ» РОЗУМІННЯ ІСТИНИ

Можна побудувати цілий ряд парадоксів, які хоч і схожі за своєю структурою до парадокса Рассела—Цермело, однак розв'язуються за допомогою розрізнення імені та його значення або імені, значення і смислу. Такий, наприклад, старогрецький парадокс «Я кажу, що я брешу», або «критянин Епіменід»: Епіменід каже, що всі критяни брехуни (тобто що вони завжди брешуть). Якщо він каже правду, то, отже, він не брехун, не всі критяни брехуни і, таким чином, він каже неправду. Якщо він каже неправду, то критяни не брехуни, отже, і він не брехун і каже правду.

Вираз «найменше число, яке визначається за допомогою шестидесяти чотирьох літер» визначає таке число, а сам складається з шестидесяти трьох літер. У цьому формуванні «парадокс брехуна» вже ближчий до метаматематичних проблем, оскільки математика має справу з функцією від числа n , яка визначає число $n+1$. Тому подібні парадокси опинилися в центрі уваги багатьох логіків і математиків.

Польський математик А. Тарський довів важливу теорему про семантичну неповноту формалізованих систем, виходячи з необхідності усунення таких семантичних парадоксів.

Ось приблизний перебіг його міркувань. Ми говоримо, що речення (твердження) істинне, якщо — і тільки якщо — воно повідомляє про дійсний стан справ. Наприклад, речення «сніг іде» істинне, якщо і тільки якщо сніг іде. Говорячи більш загально, речення p істинне, якщо і тільки якщо p .

Яких запобіжних засобів треба вжити, щоб уникнути парадокса? Skorистаємось прикладом, наведеним Я. Лу-

касеви́чем. Нехай у якійсь книжці на 17 сторінці надруковане одне-єдине речення. Ось воно:

речення, надруковане у цій книжці на 17 сторінці, хибне.

Тепер зробимо підстановки у формулу, наведену вище. «Речення *p*» — це речення, надруковане у книжці на 17 сторінці, адже інших речень там немає. Запишемо:

речення, надруковане в цій книжці на 17 сторінці, істинне, якщо і тільки якщо *p*.

Тепер підставимо замість *p* саме речення. Одержимо: речення, надруковане в цій книжці на 17 сторінці, істинне, якщо і тільки якщо речення, надруковане в цій книжці на 17 сторінці, хибне.

Де помилка? Очевидно, в тому, що не врахована різниця між реченням та його іменем. Слід було б писати:

«*p*» істинне, якщо і тільки якщо *p*.

Або краще:

x істинне, якщо і тільки якщо *p*, де *x* — ім'я *p*.

Але цього замало. Слід вважати, що речення «я кажу неправду», «*x* істинне» тощо взагалі належать не до мови-об'єкта, а до метамови, тобто вони говорять не про якусь реальність, а про мову (про речення), за допомогою якої ми щось повідомляємо про дану реальність. Поділивши вирази формалізованої або «звичайної» мови на такі, що належать до власне мови, і такі, що говорять про мову, ввівши, далі, заборону заміняти мовні вирази метамовними, можна уникнути парадоксів.

Теорема Тарського була початком інтенсивної розробки логічної семантики, що її сам Тарський розумів як теорію про зв'язок між виразами мови та об'єктами, станами або діями, з якими співвідносяться ці вирази. За Тарським, типово семантичними понят-

тями є поняття позначення, здійснюваності та визначення. Він показав, що поняття «істина» є також семантичне поняття.

Не торкаючись тут нового, семантичного підходу до суто метаматематичних проблем, звернемо увагу на філософський бік справи.

Незабаром після того, як теорія Тарського стала широко відомою математикам і логікам, філософи почали критикувати її з різних точок зору. Одні вбачали у цій теорії неприпустимий відхід від стихійно-матеріалістичного уявлення про істину як відношення думок до реальної дійсності. Адаже згідно з формулою Тарського властивість (предикат) «істинний» приписується саме імені речення, а не його змістові! Про яку ж властивість імені, тобто набору знаків, йдеться? Очевидно, лише про властивість узгоджуватися з іншими іменами за якимись правилами. Отже, істинність, на думку критиків Тарського, збігається в такий спосіб з формально-логічною правильністю: «істинний» — означає «побудований за правилами логіки», і тільки!

Правда, теорема Тарського говорить якраз про семантичну неповноту формалізованих теорій, про те, що поняття «істина» не може бути повністю виражене засобами теорії, бо є метатеоретичним поняттям, і, таким чином, не можна ототожнювати поняття «істинно» і «доведено засобами теорії». Разом із тим теорія Тарського не дозволяє говорити про істинність твердження взагалі, безвідносно до даної мовної системи.

Інші критики вбачали якраз протилежний недолік. На їх погляд, Тарський некритично поклав в основу своєї теорії наївно-реалістичну і навіть платонівську теорію істини, найповніше виражену Арістотелем. Арістотель розумів істинне речення як таке, котре, так би

мовити, сполучає в нашій голові те, що сполучене в реальній дійсності, і роз'єднує те, що роз'єднане в дійсності.

Якщо, приміром, я тверджу: «у мене є авторучка» і при цьому у мене дійсно є авторучка, то в голові і у мовленні «сполучено» об'єкти «я» і «авторучка», в дійсності вони теж сполучені (точніше, сполучені денотати відповідних імен), отже, речення істинне. Гірше вже, коли я кажу: «автомашина їде по шосе». Тут «сполучено» два об'єкти — автомашину і шосе, але якимсь неприродно зводить відношення машини і шосе до «сполучення»; адже «автомашина стоїть на шосе» — теж «сполучення» машини і шосе. Але які об'єкти «сполучаються», коли ми говоримо: «ця людина добра»? Людина і... доброта? Однак такого об'єкта, як «доброта», в природі не існує!

Критики вказували, що поряд із наївно-реалістичним уявленням про істину теорії Тарського притаманний платонівський «реалізм», який рівною мірою визнає існування і таких речей, як столи, машини, камені тощо, і таких об'єктів, як благо, число, бог — цими абстракціями, з точки зору платоніста, світ заселений так само, як і «звичайними» предметами.

Сам Тарський вичерпно відповів своїм критикам. Від формальної теорії істини вимагається лише, щоб у граничному випадку вона узгоджувалася із уявленнями про «правду», «істину» як відповідність тверджень реальності. У чому ж ця відповідність полягає, як реальність відноситься до мислення — на ці питання логіка не має засобів відповіді. Вона тільки бере за передмову стихійно-матеріалістичне розуміння істини.

Дискусія щодо проблеми істини, яка почалась ще на початку сторіччя після праць Рассела, була лише епізодом у полеміці між так званими номіналізмом та

реалізмом, що і досі точиться навколо логіко-математичних проблем. Як і в середні віки, учасники тривалої теоретичної тяжби сперечаються про реальність загального і одиничного, співвідношення абстрактних об'єктів і «звичайних» речей. Часто «реалісти» висловлюють типове платонівське уявлення про реальність прообразів людських абстракцій, а за логічними побудовами «номіналістів» іноді виразно відчувається матеріалістична тенденція. Однак по суті справи йдеться про цілком конкретні логіко-математичні проблеми, і назви «номіналізм» та «реалізм» тут можна вживати з великою важкоюю.

За визначенням відомого математика А. Френкеля, йдеться про таку дилему в підході до математичних проблем: можна постулювати, що континуум існує як певна математична реальність, і намагатись несуперечливо описати його за допомогою аксіоматичного методу — цьому напрямку відповідає «реалістична» тенденція; можна виходити з наявності дискретного світу об'єктів і намагатись «добратися» до континууму, вивівши його існування на базі тверджень про властивості і відношення цих об'єктів — такий загальний напрямок «номіналістичних» шукань.

Дискусія «номіналістів» та «реалістів» у сучасній логіці і метаматематиці повчальна як спроба розв'язати філософські питання шляхом логіко-математичних побудов. Певне філософське розуміння понять «індивід», «клас», «абстрактний об'єкт», «річ, властивість, відношення» органічно пов'язане з різними логіко-математичними теоріями, запропонованими протягом останнього півстоліття.

Позиція Фреге яскраво виражена ним в «Основах арифметики»: «Ні! Математик не може довільно продукувати щось, не більш ніж географ; він також може

лише відкривати те, що існує, і давати йому ім'я»¹. Але де існують числа, математичні операції, класи, функції, континуум, як не в людській голові? Таке питання негайно виникає у теоретика, щедро наділеного «грубим почуттям реальності». Найвиразніше його поставив Рассел, котрий вважав, що парадокси типу відкритого ним парадокса «множини всіх множин, що не є власними підмножинами» виникають внаслідок некритичного використання такого суто мовного засобу, як поняття «клас». В об'єктивній дійсності є лише речі з їх властивостями і відношеннями і не існують класи; існують червоні, важкі тощо предмети, добрі, злі і т. п. люди, не існує червоність, вага, добро, зло. Виходячи з цієї філософської тези, «номіналістичної» за своїм спрямуванням, Рассел спробував побудувати таку теорію множин, в якій поняття «клас» було б зведене до поняття «властивість», при чому властивості — врешті-решт — індивідного об'єкта. Але побудувати таку теорію можна лише за рахунок суто «реалістичних» припущень, і зараз ясно усвідомлена неможливість реалізації «номіналістичної» програми у повному її обсязі.

Рассел прагнув створити штучну, формалізовану мову, яка відповідала б за своєю структурою структурі світу — у світі немає нічого, крім речей з їх властивостями і відношеннями, і в мові не повинно бути нічого, крім індивідних змінних, n -місних предикатів та виразів, побудованих за їх допомогою. Щоправда, «річ» виявилась не зовсім тотожною реальним предметам — під нею Рассел розумів щось логічно просте, «логічний атом», який не можна далі аналізувати і досить лише

¹ Цит. за E. Beth. et J. Piaget. Epistémologie mathématique et psychologie. Paris. 1966, стор. 107—108.

назвати. Філософська основа Расселівської системи виявилась досить близькою до платонізму, оскільки «логічні атоми» ближчі до абстрактних об'єктів, таких як числа або «точки-події» релятивістської фізики, ніж до «звичайних» речей.

Та чи правомірне саме прагнення привести структуру мови у відповідність із структурою світу? Л. Вітгенштейн, віденський архітектор, що під впливом Рассела зайнявся проблемами логіки, математики та філософії, відповідає на питання категоричним «ні». Адже, доводить Вітгенштейн, людина не може «збоку» подивитися на своє відношення до світу і порівнювати структуру власної мови із структурою світу! Людина не може вийти із своєї власної шкіри; поле зору людського ока не має границь, бо в протилежному разі можна було б бачити те, що знаходиться поза полем зору; життя людини не має межі, бо ніхто не може переступити цю межу... Структура мови і є структура світу — такий висновок Вітгенштейна, в основному сприйнятий неопозитивістською філософією. Але «клітинкою» мови не можуть бути індивідні об'єкти, як не можна побудувати великого повідомлення із самих лише іменників. «Цеглиною», з якої складається мовлення, є речення, а з логічної точки зору — не індивідна константа або змінна (не ім'я об'єкта), а пропозиційна змінна або пропозиційна функція, — адже індивідні змінні вживаються лише у виразах типу $P(x)$! У цьому смисл твердження Вітгенштейна: «Світ складається не з речей, а з фактів».

Так у сучасній ідеалістичній філософії реалізується теза про «тотожність мислення і буття з боку форми», — правда, таку назву ця теза мала сто п'ятдесят років тому, сьогодні вона формулюється як теза про тотожність структури мови і структури світу. Соліпсистський,

суб'єктивно-ідеалістичний характер цієї тези Вітгенштейна очевидний. Звичайно, заспокоїливо звучить твердження, що життя людини не має меж, бо ніхто не може переступити цю межу; тут чується відгук епікурівського оптимізму: смерть стосується не мене, а того, хто після мене залишиться, а «я» і «смерть» — речі абсолютно несумісні. Проте ми добре знаємо, що це не так, і добре знаємо, що поле зору людини обмежене, і пізнання кожного разу має свої границі, — саме це дозволяє твердити про існування об'єктивного світу, незалежного від нашої свідомості.

Але повернемося до питання: чи можна вважати, що розвиток метаматематики зробив якийсь внесок у проблему «річ — властивість — відношення — клас»? Чи було побудовано систему, яка довела, що її структура найкраще відповідає структурі світу?

Слід насамперед відзначити, що ідея побудови системи, яка адекватно описувала б прийнятне для «здорового глузду» уявлення про те, що світ складається з речей, які мають властивості і відношення, і не складається з класів, абстрактних об'єктів — ідея чисто філософська і формальною логікою не може бути ні підтверджена, ні спростована. Прагнення побудувати «номіналістичну» метаматематику впливає зовсім не з того, що «реалістичні» системи незадовільні з формальної точки зору. «Реалістичний» підхід може не задовольняти філософське, світоглядне «почуття реальності», але не формально-логічні вимоги. Отже, побудова реалістичної математики так само не доводить, що «класові сутності» існують в об'єктивному світі поряд із індивідуальними об'єктами, як не спростувала б цієї тези побудова «номіналістичної» системи. Правда, виявилось неможливим звести поняття «клас» до поняття «властивість», чого прагнув Рассел, тобто зве-

сти такі поняття, як «доброта», до таких понять, як «добра (людина)».

До речі, і йшлося не про подібні властивості, а саме про математичні класи. Користуючись прикладом, наведеним американським логіком і математиком У. Квайном, можна сказати: якщо властивість «благочестивий» відноситься до класу апостолів і до кожного з них зокрема, то «апостолів було дванадцять» є характеристикою саме класу, про окремого апостола не можна сказати, що він «дванадцятничний».

Найбільшим досягненням «номіналістів» є система У. Квайна. Поняття існування для логіки і метаматематики Квайн визначає таким чином («теза Квайна»): існувати — значить бути значенням змінної. З цієї точки зору, наприклад, в системах типу Расселівської існують і індивіди, і класи, тому що і індивідні, і предикатні константи можуть бути значеннями змінної (оскільки в розширеному численні предикатів квантором зв'язується також предикатна змінна). З точки зору Квайна вираз, де фігурує клас (предикатна змінна), є лише символом, формою запису, і вирази для класів не означають, взагалі кажучи, змінних, котрі можуть бути зв'язані квантором існування. Як чисто символічна форма запису, вираз для класу є «віртуальним¹ класом», що перетворюється на «реальний клас» лише при певних визначених умовах. Тим самим реалізується компромісна точка зору: оскільки не можна звести класи (абстрактні об'єкти) до властивостей реальних індивідів, то бажано принаймні точно визначити умови існування класів.

Отже, можна бути упевненим, що з гіпотези про існування абстрактних об'єктів — класів — починається

¹ Від лат. *virtualis* — можливий.

математика (прийняття розширеного числення предикатів означає перехід від «чистої» логіки до математики). Проте це ніяк не вирішує питання, що відповідає у зовнішньому світі такому об'єктові, як числа. Ми не можемо мислити достатньо високих абстракцій, не вводячи в обіг «класових сутностей»: така структура математичного мислення.

Але яка структура світу? Чи в ньому речі існують як щось відмінне від властивостей і відношень, класи — як щось відмінне від індивідів? На це питання ні логіка, ні математика не відповідають і не можуть відповісти.

Чи означає це, що ніяких можливостей оцінити структуру мови, міру її об'єктивності ми не маємо? Кожне речення твердить щось про стан речей і тим самим якимось відноситься до певного стану речей; але речення нічого не говорить про своє відношення до стану речей, нічого не говорить саме про себе. Речення і сукупність речень — теорія — можуть бути істинними або хибними, але не можуть містити доказу тверджень про свою власну істинність або хибність. Людина теж може бути доброю, розумною, благородною, недоброю і так далі, але не її справа — визначати, чи вона добра, розумна тощо: для цього потрібні інші люди. Правда, з цієї точки зору самооцінка і взагалі самосвідомість можуть здатися чудом. Проте об'єктивна самооцінка є лише наслідком того, що якості людини визначаються її взаємодією з іншими людьми.

Мова виражає властивості об'єктивної дійсності за допомогою своєї структури (в тому числі й логічної структури), але мова нічого не говорить про співвідношення своєї структури із структурою світу.

Якщо прийняти тезу Вітгенштейна, то ніякої самооцінки не може бути і в даному випадку. Але так само, як нам відомі її обмеженість нашого поля зору, її об-

меженість термінів нашого існування; так само, як людина може дати собі моральну самооцінку, — можна спробувати дати якусь оцінку мовним структурам.

Визначити відношення ідей до об'єктивної реальності, мовних структур до структури світу — завдання діалектико-матеріалістичної теорії пізнання. І тут величезне значення має вказівка В. І. Леніна про те, що теорія пізнання і діалектика складаються із історії окремих наук, історії розумового розвитку дитини і тварин, історії мови, психології, фізіології органів чуттів.

ВИХОДЯЧИ ЗА МЕЖІ ТЕОРЕТИЧНОЇ ЛОГІКИ

Уже перше знайомство з даними психології тварин показує, що здатність розрізняти в хаосі звуків, запахів, кольорових плям предмети і виділяти їхні властивості з'являється на досить високому щаблі еволюції. За А. М. Леонтьєвим, відомим радянським психологом, можна класифікувати етапи розвитку психіки таким чином: 1) сенсорна стадія; 2) перцептивна стадія; 3) тваринне мислення («ручний інтелект»). Лише на другій стадії, тобто десь починаючи з птахів, з'являється здатність до сприйняття речей як єдиного цілого.

Це не означає, що риби чи комахи не здатні об'єднувати чуттєві образи в якісь комплекси, не розрізняють форми, відстані тощо. У такому випадку тварини не орієнтувались би в навколишній дійсності і просто не могли б існувати. Справа в тому, що об'єднання в комплекси окремих елементів йде за таким принципом: як щось цілісне, по-перше, сприймається вся ситуація («гештальт-ситуація»), і окремі елементи ситуації (об'єднання в ціле груп запахів, кольорів тощо) вичленовуються з цього цілого; по-друге, елементи ситуації об'єднуються в ціле не тому, що відносяться до одного об'єкта,

а тому, що мають одне біологічне значення («загроза», «їжа» тощо).

Павук, навіть дуже голодний, утікає від мухи, зустрівши її поза павутиною. Він сприймає муху як здобич тільки за певних умов — лише рух павутини (причому — строго визначеної амплітуди) спонукає павука наближатися до своєї здобичі. Це не означає, як ми готові собі уявити, що муха в павутині набула для павука якогось особливого значення, наче курча в соусі. Павук просто реагує на тріпотіння павутини; так само він повзе до камертона, що вібрує з певною амплітудою, коли його прикласти до павутини.

Жаба добре бачить муху. Але нерухома муха не сприймається нею як здобич: жаба може померти з голоду, але не схопить нерухому муху або харчувальну таблетку. Та справа докорінно змінюється, коли їжа переміщується відносно фону. Жабу вмещували всередину циліндра або на столі з нахиленою кришкою. Поруч клали таблетки; жаба їх не чіпала. Але досить було обертати циліндр або кришку, так щоб харчувальні таблетки рухалися відносно фону, як жаба негайно їх ковтала.

Леонтьєв демонструє різницю між сенсорною та перцептивною психікою, посилаючись на такий дослід. Двом сомикам клали в басейн м'ясо і на шляху до нього ставили перегородку з натягнутої марлі. Після довгих спроб добратися до м'яса сомик навчився обходити перегородку і закріпив цей навик. Коли перегородку знімали, сомик продовжував рухатися до їжі, обминаючи уявну перепону. Так продовжувалося багато разів, поки траєкторія шляху сомиків не ставала все більш прямою. Автори дослідження зробили цілком обґрунтований висновок: тварини на даній стадії розвитку

психіки реагують на ситуацію, сприймають їжу і перепону не як два окремих образи, а як один.

На стадії перцептивної психіки тварини вже мають здатність до операції. Поки немає здатності до операції над окремими предметами, не можна говорити ні про які аналогії з «суб'єктно-предикатною структурою» людського сприйняття. Але й на стадії перцептивної психіки структура сприйняття ще далека від того, щоб виділяти різні ознаки одного й того ж предмета. Так, у дослідах з вороновими птахами не сприймали експериментатора як ціле: на праву руку, яка давала їм їжу, вони реагували позитивно, а на ліву часто нападали. Кури, котрі живуть разом, пізнають «своїх». Але досить було загнати курці гребінь або перефарбувати його, як кури починали нападати на співмешканку, що одразу ставала їм «чужою». Здатність ототожнювати предмет із самим собою, виділяти різні ознаки тут є лише у зародку.

Можна обгрунтовано твердити, що «наростання» здатності живої істоти розпізнавати предмет як одиничну, якісно визначену цілісність, прямо пропорціонально «наростанню» здатності здійснювати операції, переносити операції в нові умови, а разом з тим — збільшенню здатності до елементарних розумових дій, до узагальнення.

Така ж закономірність спостерігається і при аналізі психології дітей. Особливо цікавий матеріал дають дослідження школи швейцарського психолога Ж. Піаже, присвячені генезису елементарних логічних структур. Піаже встановив, що на всіх рівнях розвитку психіки перцепція (сприйняття) пов'язана з схемами дії більш високого порядку, ніж саме сприйняття; ці схеми дії здатні впливати на структуру сприйняття. Не можна уявляти собі справу так, що спочатку на «чуттєвому рівні» ми пізнаємо одиничні предмети, а потім на «раціональ-

ному» здійснюємо над поняттями логічні операції. Здатність до сприйняття одиничних предметів є функцією здатності до виконання операцій, в тому числі елементарних логічних операцій.

Власне «зрілий» спосіб суб'єктно-предикатного розчленування світу з'являється у дитини значно пізніше, ніж це видається на перший погляд. Дитина 2—5 років може встановлювати схожість і різницю сприйнятих предметів, тобто оперувати властивостями предметів, які утворюють зміст поняття. З іншого боку, предмети сприймаються дитиною в цьому віці як елементи якихось просторових агрегатів (фігурних сукупностей); просторові агрегати мають, таким чином, об'єм, і дитина може ділити предмет або фігуру на частини або відновлювати сукупність, виходячи з її елементів.

Але від цього ще дуже далеко до пов'язування об'єму і змісту поняття! Дитина може асоціювати ляльку, наприклад, з коліскою, замість того, щоб співвідносити ляльку (дитину) з людьми, а постіль — з меблями. Подальша еволюція приводить до координації між об'ємом та змістом поняття. Об'єм приписується вже не просторовій сукупності, а класу, який не зв'язаний з простором і має, таким чином, «безконечний» об'єм. Саме на цьому рівні можна говорити про здатність індивіда до розчленування світу на речі, властивості й відношення.

«Властивість — відношення» виникає в ході розвитку психіки на основі формування здатності до практичних операцій, а у людини з'являється на основі специфічної, соціальної практичної діяльності. Ці факти можна розглядати як підтвердження гіпотези К. Маркса про соціальне, суспільно-практичне походження таких категорій людського мислення, як «загальне» і «особливе»: «Але що сказав би старик Гегель, — писав Маркс Енгельсу в одному з листів, — якби він узнав на тому світі, що

загальне (Allgemeine) означає у германців і жителів півночі не що інше, як общинну землю, а окреме (Sondere, Besondere), не що інше, як приватну власність, що виділилася з цієї общинної землі. Виходить, що логічні категорії — прокляття — прямо впливають із «наших відносин» (aus unserer Verkehr)»¹.

Звичайно, питання про те, що залежить в характері людського мислення від анатомо-фізіологічної організації, що — від індивідуально-психологічної практики, а що — від соціально-економічної організації суспільства, не можна вважати достатньо вивченим. Та не підлягає сумніву, що логічні структури формуються в матеріальній життєдіяльності еволюціонізуючих істот, а на рівні людини — в ході суспільно-практичної матеріальної життєдіяльності.

Тепер зробимо деякі підсумки.

Істинність тверджень не означає, що їх логічна структура відповідає структурі світу або, ширше кажучи, що структура мови є структура світу (образ структури світу). Якщо я кажу, що в кімнаті стільців чотири або що Володя — чудовий хлопець, то тим самим я зовсім не тверджу, ніби існують предмети (стільці, Володя), класи (числа), властивості («бути чудовим»). Я просто тверджу, що стільців не п'ять і не три, а саме чотири, що Володя не негідник, а саме чудовий хлопець.

Поділ світу на речі, властивості (класи), відношення є лише засіб виразити згадані твердження. Істинність тверджень не є ні виявом тотожності структури мови структурі світу, ні наслідком дії «апріорних» законів сприйняття — структури мислення і структури сприйняття формувалися в процесі тривалої еволюції живого,

¹ К. Маркс, Ф. Енгельс. Письма о «Капитале». М., 1948, стор. 141.

мають різні властивості залежно від характеру матеріально-практичної діяльності індивіда.

Одночасно мовним структурам відповідають певні гіпотези про будову світу: разом із нашою мовою і нашою класифікаційною системою, на основі якої ми сприймаємо світ і можемо формулювати істинні твердження, ми неначе формулюємо гіпотезу: світ складається з речей, властивостей і відносин. Ця гіпотеза є передумовою нашого досвідного пізнання, прийняття її еквівалентне прийняттю людської мовної системи, але не слід забувати, що це лише гіпотеза, без котрої не можемо обійтись ми, люди, з нашою мовою, але яка, очевидно, лише відносно істинна. Відносна істинність такої гіпотези підтверджується тим, що річ, взагалі кажучи, є не що інше, як сукупність властивостей, тоді як мислення завжди відрізняє річ від властивостей, розглядуваних як щось таке, без чого річ можна мислити.

СВОБОДА І НЕОБХІДНІСТЬ У НАУКОВОМУ ПІЗНАННІ

ВИЗНАЧЕННЯ ТА КОНВЕНЦІЇ

Перша неевклідова геометрія, побудована М. І. Лобачевським, одержала назву «уявної». В дійсному світі реалізується евклідова геометрія, але можна в уяві собі мислити і неевклідові простори — так приблизно пояснювали справу найбільш радикальні уми початку і середини минулого сторіччя.

Розвиток математики, застосування неевклідових геометрій у таких побудовах, як загальна теорія відносності і релятивістська космологія, показали, що неевклідова геометрія зовсім не така вже й «уявна». І досі часто говорять, що «наш», «звичайний» простір евклідовий, хоча вже зараз ясно: евклідовий простір — така ж абстрактно-математична побудова, як і неевклідовий.

А щодо геометричних уявлень «здорового глузду», донаукових уявлень про просторові відношення, то вони — лише одні з відношень і властивостей, відомих людщині, а всякі відношення і властивості як окремі об'єкти виділяються тільки мисленням.

Пригадаємо, у чому полягає ідея неевклідових геометрій. В геометрії Евкліда існує п'ятий постулат, згідно з яким через точку, котра знаходиться поза даною

прямою, можна провести лише одну пряму, паралельну даній прямій. Було зроблено багато спроб довести, що заперечення цього постулату веде до логічних суперечностей в геометрії. Однак виявилось, що заперечення п'ятого постулату Евкліда логічно сумісне з іншими постулатами. При бажанні можна прийняти, що через точку не можна провести жодної прямої, паралельної даній, або що через точку можна провести нескінченно багато прямих, паралельних даній. Одержані геометрії будуть несуперечливими.

Тут недарма виділено слова «при бажанні». Це не перебільшення; справді, при побудові геометрії ніщо не диктує нам необхідності прийняти те, а не інше формулювання п'ятого постулату. Правда, в результаті будуть одержані теорії з різною сферою застосування, але це вже справа вживання теорії, питання правомірності використання.

Широкий розвиток метаматематичних досліджень і створення різних логік ще більше посилили елемент довільності в теоретичних побудовах. Логік (понять доказу) можна сформулювати багато, і ніхто не доведе, чому треба обрати саме цю, а не іншу систему для обґрунтування математики. Можна навіть обрати різні логіки і одержати різні метаматематичні побудови (класичну або інтуїціоністську). Одну й ту ж теорію можна сформулювати за допомогою різних логіко-математичних засобів. Для опису однієї і тієї ж реальності можна інколи побудувати відмінні, але обов'язково істинні теорії.

Усвідомлення того, що фундаментальні логічні структури є результатом розвитку форм матеріальної життєдіяльності, саме по собі не заспокоює. Адже це лише підкреслює залежність способів членування світу на окремі елементи від специфічно людської організації,

змушує нас подумати про те, що позаземні цивілізації могли б мати зовсім іншу мовну структуру. Ніхто не стане твердити, що поділ світу на такі елементи, як «річ — властивість — відношення», є результатом свідомого вибору мовних структур. Але залежність мовних структур від способу організації життєдіяльності пізнаючого суб'єкта не підлягає сумніву.

А якщо мовні структури, такі, як мова математичної логіки, створюються штучно? Чи обмежена чимось свобода вибору логічних засобів у цьому випадку?

Слово «конвенція» так і напрошується. Конвенція, або угода — ось єдине, здавалось би, що обмежує нашу свободу у виборі мовних засобів. Можна обрати будь-який спосіб говорити про світ; досить домовитися, що означають наші вирази, і дотримуватися прийнятих правил. Так уявляється теоретична діяльність прихильникам конвенціоналізму.

З конвенціоналістської точки зору вирішальним пунктом у науковому пізнанні, принаймні у теоретичних побудовах, пов'язаних із логікою та математикою, є угода, що змушує прийняти визначення. Все подальше в логіці і математиці — справа техніки, по суті машиноподібної. Власне творчий елемент проявляється в дійсно вільному акті вибору вихідних мовних принципів, решта вже до творчості не належить.

І справді, адже побудова логіки є результат визначення основних логічних операторів та конекторів, а сама логіка є не що інше, як визначення поняття доказу! А визначення має довільний характер, оскільки воно лише допомагає скороченню запису і нічого об'єктивного в собі наче-не містить. Визначення розуміли як доказ лише теологи; так, в середні віки вважалось доказом буття бога визначення бога Ансельмом Кентерберійсь-

ким: оскільки бог є сукупість усіх досконалостей, а буття є безумовно досконалистю, то бог є.

Хибність подібних уявлень про визначення не така вже й очевидна, і в математиці не зовсім легко позбутися деяких визначень, не дуже далеких від аргументації Ансельма. Та слід усвідомити, що визначення повинно лише забезпечити уніфіковане вживання певного терміну, і у зв'язку з цим зумовлюється передусім міркуваннями зручності.

Поширення математичних понять і методів у різних галузях знань, насамперед у теоретичній фізиці, переносить згадану проблематику далеко за межі математики.

В «Ерлангенській програмі», сформульованій німецьким математиком Ф. Клейном у 70-х роках XIX ст., як геометричні властивості різних просторових конструкцій розглядалися ті властивості, що зберігаються при певних просторових перетвореннях. Евклідова геометрія вивчає такі властивості, як, наприклад, «кут», що зберігаються, коли квадрат піддати паралельному перенесенню, повороту, зеркальному відображенню або рівномірному в усі боки розширенню чи стисненню. При цьому міняються координати вершин квадрата або спосіб приписування точкам-вершинам числових значень, але щось при будь-яких просторових перетвореннях не змінюється (залишається інваріантним щодо цих перетворень). Ось цей інваріант, це «щось», і є предметом розгляду в геометрії.

Якщо ми спроектуємо квадрат на площину, не паралельну площині квадрата, то й кути можуть деформуватися; однак, якісь властивості залишаться. Те незмінне, що буде спільним і квадрату, і його проекції, вивчається афінною¹ геометрією. Різні геометрії характеризуються

¹ Від лат. *affinis* — суміжний.

тим, що ми обираємо за інваріант просторового пет-творення.

Ідея Клейна успішно реалізується також і в галузі фізики у зв'язку з торжеством теоретико-групових методів. Застосування алгебраїчної теорії неперервних груп до класичної механіки стало можливим уже після праць Софуса Лі (70-і рр. XIX ст.), які створили можливість інтерпретації класичної механіки в термінах неперервної групи. Теорема Е. Нетер (1918) дозволяє знайти систему інваріантів будь-якої теорії, сформульованої за допомогою лагранжевого або гамільтонового формалізму.

З точки зору, яка нас тут цікавить, справа може бути приблизно пояснена таким чином.

У вік розквіту класичної механіки закони збереження розглядалися як відношення між певними об'єктивно реальними сутностями — наприклад, матерією (речовиною, кількість якої асоціювалася з масою) і рухом (кількістю руху, енергією). Це приводило до не завжди ясно усвідомлюваних труднощів — рух розглядався, з одного боку, як зовнішня реальність, а з іншого — йому відмовляли у статусі самостійного об'єкта. Але найчастіше цих труднощів не помічали.

Сучасна фізика начебто вносить елемент конвенціональності в ці уявлення. Після теореми Нетер закон збереження енергії можна розглядати як твердження про інваріантність лагранжевої функції відносно зміщення початку координат в часі, закон збереження кількості руху — як твердження про інваріантність лагранжевої функції відносно заміщення початку відліку в просторі тощо. Це, грубо кажучи, означає, що твердження про збереження кількості руху за змістом не відрізняється від такого твердження: якщо я прикладу до краю вимірюваного предмета нульовий поділ лінійки, то

одержу той же результат, що й якби я приклав лінійку до предмета будь-яким іншим поділом. Створюється враження, що закони збереження є не більше, ніж визначення вимірювальних процедур.

Р. Фейнман у зв'язку з симетрією перестановки однакових атомів пише: «Дурниця якась, — може заперечити якій-небудь скептик, — адже це просто визначення того, що означають атоми одного й того ж сорту! «Згоден, це може бути просто визначенням, але вся справа в тому...»¹

Тут ми обірвемо цитату. Ми ще повернемося до неї, а поки констатуємо, що не лише логіка, а й фізика якоюсь мірою є результат визначення і, отже, — результат «конвенції». А перш ніж говорити, якою ж мірою, дозволимо собі короткий відступ від логіки, фізики, математики до проблем мало не морально-етичних.

СВОБОДА, ВИБІР, ВІДПОВІДАЛЬНІСТЬ, НЕОБХІДНІСТЬ

«Свобода є пізнана необхідність». Хто не знає цієї формули, хто не звикся з думкою про те, що вона належить саме до марксистської філософії! А між тим це висловлення — надбання раціоналістичної філософії Нового часу і вперше було сформульовано навіть не Гегелем, а Спінозою. І зміст у нього можна вкладати різний, в тому числі і неприйнятний для матеріалізму

Раціоналістична філософія XVII—XVIII ст. розумність людської діяльності прямо і безпосередньо виводила з розумності світу, а збіг того й іншого був кінець кінцем справою «наперед встановленої гармонії». З точки зору Спінози для свободи в загальноприйнятому

¹ Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. 4. М., 1967, стор. 240.

значенні слова ніякого місця не залишається. Індивід одним-єдиним способом може встановити «розум буття», і це детермінує всю його поведінку.

Правда, у Гегеля немає вже такої жорстко детерміністської картини зв'язку вільної діяльності з необхідністю («розумом») буття. Раб, який усвідомив своє рабське становище, не стає від цього вільним, але вже починає підніматися на новий щабель розвитку духа. Характеризуючи в «Феноменології духа» так звану нещасну свідомість, Гегель іронізує над свідомістю, яка шукає благочестя на шляху умиртвлення своїх особистих життєвих сил і емоцій, підпорядкування їх освяченим соціальним нормам, знаходить у цих нормах постійного порадника і тим самим складає на них (або на бога) «самобутність і свободу рішення, а тим самим і вину свого діяння. ...Вчинок, оскільки він є виконання чужого рішення, з боку діяння або волі перестає бути власним вчинком»¹. Однак, коли справа доходить до «абсолютної свободи» як «абсолютного знання», то тут все зводиться до «повернення духа до самого себе», до самопізнання з метою встановлення повної тотожності духа з самим собою; історія перетворюється на галерею спогадів «абсолютного духа», в якій місця для рішення, волі, вільної діяльності індивіда не має, а філософ гордого «абсолютного духа» — на висміяного самим Гегелем носія «нещасної свідомості», «обмежену собою і своїми дрібними діяннями, настільки ж нещасну, наскільки бідну особистість, яка сама себе висиджує»².

В інтерпретації старого раціоналізму зникає різниця між безсилим усвідомленням неминучості власного рабства і гордим усвідомленням об'єктивної істини. А у

¹ Гегель. Сочинения, т. IV, М., 1959, стор. 121.

² Там же, стор. 120.

Енгельса йдеться не просто про «усвідомлену необхідність», а про «здатність приймати рішення із знанням справи»¹. А це вже по суті міняє постановку питання.

Приймати рішення можна лише тоді, коли є вибір. Якщо вихід один, то й рішення непотрібне. А творчість означає не лише вибір із готових варіантів: у процесі творчості людина сама мислено буде різні варіанти майбутнього результату і засобів його досягнення, щоб потім обрати найкращий. Людина — не сукупність раціональних принципів, з яких можна вивести всі моральні норми та логічні категорії.

До речі, таке по суті ідеалістичне розуміння людської сутності було осміяне Марксом і Енгельсом у «Святому сімействі». Показуючи безглуздість спроб знайти «звідки» й «куди» в коханні, Маркс і Енгельс писали: «Критична критика бореться тут не тільки з любов'ю, але й з усім живим, з усім безпосереднім, з усяким чуттєвим досвідом, з усяким взагалі дійсним досвідом, відносно якого ми ніколи наперед не знаємо ні «звідки», ні «куди»².

Вибір у творчості і творіннях самих варіантів, із яких доводиться вибирати, — сторона всякого виробництва, у тому числі духовного. Необхідність втручається у процес творіння не тим, що зводить нанівець вибір. Але, по-перше, вона істотно обмежує варіант наявним, досягнутим у процесі історичного розвитку матеріалом. І головне — результат праці має об'єктивні наслідки, стає надбанням не індивіда, а суспільства.

Виявом цієї обставини є відповідальність, яку несе кожен індивід перед самим собою, своїми близькими, своїм класом, своєю нацією, нарешті, перед люд-

¹ Ф. Енгельс, Анти-Дюрінг. К., 1949, стор. 103.

² К. Маркс, Ф. Енгельс. Твори, Т.2, стор. 24.

ством. Саме цю обставину неодноразово підкреслював В. І. Ленін, зазначаючи, що характер вчинків того чи іншого політичного діяча визначається не мотивами, не спонукани, а тим, якому «класові вигідні наслідки цих вчинків, принципом «кому вигідно?»».

Наївно-матеріалістичне світорозуміння, за яким фізичне і духовне життя людини так само детерміноване зовнішніми подразниками, як рух більярдної кулі зумовлений ударом кия, не залишає місця для свободи, вибору, відповідальності. «Мертве», «дзеркальне» відображення якраз і означало б таку пізнавальну і практичну діяльність — нормовану, детерміновану, позбавлену вибору і відповідальності, власне, знайому лише з відповідальністю гвинтика за роботу певної деталі механізму.

У діалектико-матеріалістичному розумінні свобода є пізнана необхідність тому, що чим глибше пізнання, тим більше можливості накладати на хід подій печать власної волі.

Чому не можна плигнути з десятого поверха? Людина вільна зробити і це, але наслідки такої дії були б трагічні, і те, що людина не робить цього (чи робить), детерміноване можливими наслідками.

Звичайно, у XVIII ст. не можна було плигнути з со- того поверху, бо таких високих будинків не було. І в ХХ ст. не можна виплигнути нагору на сотий поверх — не дозволяє закон тяжіння. Кількість і якість варіантів, з яких нам кожного разу доводиться вибрати, обмежена природою і історією. В міру прогресу людства можливості вибору зростають. Але відповідальність за наслідки вільних рішень залишається їх найважливішим регулятором.

У фантастичних повістях уже не раз використовувалася така приблизно тема: мисливці на «машині часу» їздять полювати в минуле, вбивають метелика, а коли

повертаються у свій час, виявляється, що історія кардинально змінила свій хід.

Чи не занадто великі наслідки? Принаймні підрахувати усі, навіть найголовніші наслідки якоїсь дії — справа практично безнадійна. Тому суспільство подбало про те, щоб полегшити індивіду обрахунки, встановивши класифікацію дій і форми заохочення або покарання соціально-значущих вчинків. Образ Феміди з терезами в руках глибоко символічний: так як у процесі зважування дорівнюються один до одного різні предмети, в яких ми бачимо лише те, що вони еквівалентні *n* кілограмам — так і різні вчинки дорівнюються суспільством один до одного, а то й до такого еквівалента, як *n* років ув'язнення. Загальний еквівалент, або норма, — засіб реалізації відповідальності, бо можлива дія, про яку говорять: «формально правильно, а по суті знущання». Однак виходу немає, оскільки у кожному конкретному випадку неможливо або не завжди можливо врахувати всі наслідки.

Слова «правильно», «право», «справедливість», «права», «правило» — одного походження, і це показує, що проблема істини (правди) не відгороджена від проблеми відповідальності. Хто-хто, а вчений — автор наукових істин — творить, тобто вільно конструює свої поняття. І за свої творіння вчений несе відповідальність, зокрема, вони повинні говорити правду про навколишню реальність. Її можна сказати по-різному, але це не повинен бути обман, хиба, помилка, бо помилка в науці коштує не менш дорого, ніж у буденному житті.

Оцінити, чи сказана правда, в науці набагато важче, ніж у повсякденності. Вищий витвір наукового пізнання — наукова теорія — складається не з істин, кожному з яких можна перевірити безпосередньо, а з сукупності тверджень, пов'язаних між собою шляхом виведення.

Теорія починається там, де можна виділити дві множини тверджень: множину тверджень, які приймаються за вихідні, та множину тверджень, які приймаються за свідні. Вивідні твердження повинні давати передбачення того, що без теорії передбачити не можна.

Приблизно такого роду відповідальність за свою наукову продукцію має на увазі (або повинен мати на увазі) кожен, хто працює в галузі науки.

ОБ'ЄКТИВНИЙ ЗМІСТ ОПЕРАЦІЙ СИМЕТРІЇ

А тепер наведемо повністю обірвану вище фразу американського фізика Р. Фейнмана. «Дурниця якась, — може заперечити який-небудь скептик, — адже це просто визначення того, що означають атоми одного й того ж сорту! «Згоден, це може бути просто визначенням, але вся справа в тому, що до досвіду нам невідомо, чи існують в природі атоми «одного й того ж сорту», і експериментальний факт полягає в тому, що таких атомів багато, дуже багато»¹.

Суть справи дійсно полягає саме в цьому. Можна обрати будь-яку дефініцію (визначення). Але лише досвід встановлює, чи описує реальність система, побудована на обраних дефініціях. Ми вільні у виборі понять. Але не всяка система понять виявиться застосовною в досвіді, у практиці.

Можна провести аналогію між логічними операціями та операціями симетрії в геометрії і фізиці.

У геометрії кожній точці простору приписується трійка чисел — координати. Координати є не власними, або варіантними, властивостями точок, ос-

¹ Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. 4. М., 1967, стор. 240.

кільки способів нумерації точок можна вибрати довільний. Аналогічно «невласними» властивостями пропозиційних змінних та здійснених формул логіки є їх істиннісні значення, оскільки вони залежать виключно від того випадкового факту, яке саме речення буде підставлене замість змінної — істинне чи хибне. В обох випадках маємо справу з істинними факту, залежними від суб'єкта — не в тому розумінні, що істинність чи хибність речень, просторове положення точок залежить від чинієсь сваволі, а в тому розумінні, що ні істинність речень, ні положення тіл самі по собі не є об'єктом дослідження логіки чи геометрії і для розгляду неістотні.

Оскільки пропозиційна змінна може розглядатись як ім'я будь-якого речення, то істинність її є справою факту або справою нашого довільного вибору — вибору конкретного речення, яке ми підставлятимемо замість змінної. Ніщо не заважає нам підставити замість змінної одне з таких речень: «У січні в Києві холодно», «У січні в Києві жарко», «Двічі два — чотири», «Двічі два — вісімдесят п'ять». Звичайно, це не означає, що істинність кожного з цих речень залежить від нашого вибору: логіка просто не вивчає істинності конкретних речень.

Те ж можна сказати про такі формули, як «якщо x , то y », «якщо x , то y або z » тощо: вони істинні при одних значеннях змінних і хибні при інших. У цьому і тільки у цьому значенні слова істинність таких формул є істинність факту. Що ж до змісту конкретних речень, які при бажанні можна підставляти замість змінних, то це може бути і емпіричний факт («У січні в Києві холодно»), і арифметична істина («Двічі два — чотири»).

Метою геометричних побудов є знаходження виразів, що характеризують властивості простору незалежно від способу нумерації його точок. Такі властивості назива-

ють інваріантними щодо перетворень певного класу, або властивостями об'єктів. Аналогічно метою логічної теорії є визначення таких виразів, які зберігають істиннісні значення незалежно від способу «нумерації» речень за допомогою змінних, тобто незалежно від значень пропозиційних змінних. Вважаючи, що в логіці припустимі перетворення речень (шляхом застосування правил виведення), з невеликою натяжкою можна було б назвати ці перетворення інваріантними відносно значення «істина».

З об'єктом, позначеним геометричною або логічною формулою, можна зробити щось таке, від чого він не зміниться — зміниться лише спосіб його найменування. Закони геометрії і закони логіки, таким чином, симетричні в тому розумінні, в якому цей термін вживав Г. Вейль. Список тотожно-істинних формул логіки є список операцій симетрії.

Можна розглядати список операцій симетрії в евклідовій геометрії як визначення понять типу «кут» тощо. Можна розглядати такий список у логіці як визначення поняття доказу, як визначення логічних операторів та функторів.

Задача логіки полягає в тому, щоб знайти способи відбору таких формул, які можна вважати істинними незалежно від значень змінних. Разом з тим розв'язується проблема добору послідовності речень, яка і називається доказом. Визначення поняття доказу одночасно є визначенням поняття «і», «не», «або» тощо. Ніяких тверджень про зовнішній світ поняття доказу не містить.

Всі теореми відповідних теорій можна вважати результатом «механічної», «машинноподібної» роботи над засновками правил виведення. Але це — підхід чисто

абстрактний, хоч і законний. На ділі кожному теорему треба «взяти з бою».

Побудова дедуктивної теорії — таке ж шукання, як і всяка інша творчість. Результат, як правило, тут формулюється раніше, ніж знайдено засоби його побудови — так само, як і в інших видах творчості. За результат творець так само несе відповідальність, як і в інших випадках; треба не просто сформулювати красиве твердження, а її умістити його в цілісну систему людських знань, знайти йому доказ. У процесі шукання доказу результат може виявитися хибним, і його відкидають.

Сукупність виразів теорії повинна стати описом якогось реального, емпірично констатованого процесу, давати передбачення спостережуваних явищ. Логічна теорія теж повинна узгоджуватися в результатах з емпірично спостережуваним процесом умовиводу — принаймні забороняти такі вирази і їх послідовності, які відповідають логічним помилкам, суперечностям в наших міркуваннях.

З цього погляду логіка (сукупність теорем логіки) є формальним описом фактичного стану справ у доказі так само, як геометрія є формальним описом фактичного стану справ у просторі. Можна сказати, що логіка описує фактичний стан справ у мові, маючи на увазі більш широке розуміння терміну «мова», ніж звичайно.

Геометрія, логіка, фізика — ці й інші теорії розрізняються не тим, що одні дають істини а priori, а інші — істини а posteriori: кожна теорія має свій предмет дослідження, кожна теорія емпірична в тому розумінні, що теоретичними засобами вивчає фактичний стан справ у своїй галузі. Закон Кеплера і закон виключеного третього однаково описують факти, тільки факти в різних галузях. Та обставина, що законам логіки підля-

гають і математичні, і біологічні, і всякі інші дослідження, показує лише, що наукове мислення в будь-якій галузі повинно бути доказовим.

На логіці добре можна показати, що означає «підлягати законам». Закони логіки, як і закони фізики, формулюють насамперед певні заборони, порушення котрих неприпустиме або означатиме такі ж помилки, які бувають при «неправильному мисленні». Та обставина, що формальна логіка описує реальне логічне слідування, ніякою мірою не означає, що коли б ми підставили замість пропозиційних змінних конкретні речення, то одержали б «точнісінько те саме» або «приблизно те саме», що відбувається в нашій голові під час міркування. Будь-який редактор викреслив би з тексту всі тривіальності на зразок «якщо x , то x », «якщо сніг іде, то сніг іде або не йде» тощо (коли, звичайно, це не логічний доказ, свідоме застосування законів логіки). Звичайно тавтології ми прагнемо уникати, хоча для логіки тавтології являють найбільшу цінність. Формулювання тавтології важливе не тому, що в реальному доказі все складається з тавтологій, а тому, що порушення їх неприпустиме. І вже фрази типу «якщо x , то не x » редактор і автор зобов'язані уникати.

Аналогічно закони природи, котрі формулюються у вигляді певного списку операцій симетрії, є також формулюваннями заборон. Збагачення фізичної картини світу можна розглядати як розширення фундаментальної групи, як появу все нових правил заборони.

ПОНЯТІЙНИЙ АПАРАТ НАУКОВОЇ ТЕОРІЇ

ДУМКА ЯК ОБРАЗ ДІЙСНОСТІ

Нагадаємо тривіальну, але не завжди ясно усвідомлювану обставину: речення говорить про щось, тобто не саме про себе; воно неначе «спрямоване» назовні, стверджує, заперечує, ставить під сумнів тощо якийсь стан речей. У «звичайній» мові це завжди мається на увазі, тому тут ніколи не виникають або, точніше кажучи, легко усуваються парадокси типу «я кажу, що я брешу». У формалізованій мові вводяться спеціальні обмеження, щоб уникнути семантичних парадоксів, бо тут не враховується зміст твердження, речення сприймається як знак або набір знаків.

У «Фейнманівських лекціях з фізики» тривіальність поняття «спостерігач», яке вживають у класичній фізиці, ілюструється таким прикладом. Дерево падає в лісі, де немає ніякого спостерігача; чи супроводиться падіння шумом, коли його ніхто не чує? Справді, «шум» — це явище свідомості, певне відчуття; чи може бути шум, якого ніхто не міг чути?

Питання ускладнене тим, що йдеться саме про слуховий, а не зоровий образ. Якби питалося про те, чи залишається дерево зеленим і прямим, коли на нього ніхто не дивиться, виникало б, напевне, менше сумнівів, оскільки зоровим образам ми звикли приписувати більше

об'єктивності, ніж смаковим чи слуховим. Ми ясно усвідомлюємо, що «солоність» — наше відчуття; зрештою, «зелений» і «прямий» у цьому розумінні нічим не відрізняються від «солоного». Але звичайно не кажуть: у мене відчуття солоне, і сіль так само солоне. Проте інколи міркують так: у відчуттях дерево пряме, і насправді воно пряме. «Подібність» зорового образу до оригіналу уявляється на зразок подібності фотографії та оригіналу.

Але, порівнюючи фотографію з оригіналом, ми порівнюємо два зорових образи! З чим можна порівняти зоровий образ дерева, як не з іншим зоровим образом? Адже не можна вилізти із власної шкіри, щоб охопити предмет не таким, яким його бачать люди, а таким, який він є «сам по собі»!

Неправомірність такого «трансцензусу» («стрибка») за межі «я» завжди відстоювали суб'єктивні ідеалісти, влучно вражаючи цією аргументацією наївний, стихійний матеріалізм «здорового глузду». І все ж «здоровий глузд» правий: дерево дійсно зелене, а не червоне чи блакитне, пряме, а не криве, сіль дійсно солоне, а не солодка, ложечка в наполовину заповненій чаєм склянці тільки здається переламаною, а насправді вона пряма!

У чому ж тут справа? Насамперед відзначимо, що йдеться не про «чисті відчуття», бо у людини в сприйнятті світу активну участь беруть більш високі структури діяльності, в тому числі мислення, і світ одразу ж сприймається як такий, що «складається» із речей, властивостей і відношень. Йдеться передусім про знання, виражені у поняттях «шум», «солоний», «зелений», «прямий» тощо.

Ці образи можна розглядати як феномени психіки, як фізіологічні явища і т. п. Але це буде точкою зору психолога, психіатра, фізіолога. Коли філософ говорить

про «образ», мається на увазі саме те, що говорять слова «солоний», «прямий», «зелений». Глибоким переконанням «здорового глузду», властивим як повсякденній практиці, так і науці, в тому числі і філософії матеріалізму, є упевненість в наявності «чогось поза нами», реальності, котра не залежить від відчуттів індивіда і самого його існування.

Що саме являє собою це «щось»? Про те говорять кожного конкретного разу конкретні характеристики реальності: «солоне», «зелене», «пряме» тощо.

Ці характеристики «говорять про реальність», і ніяким іншим способом об'єктивна дійсність нам не дана. Але важливо, що за допомогою подібних характеристик можна сказати правду і можна помилитися (сказати неправду). На щастя, нікому не треба роз'яснювати, що таке «солоний» чи «прямий». Ложечка в склянці має в дійсності властивість «бути прямою», тобто сказане нами речення: «Ложечка пряма» — істинне, а речення: «Ложечка переламана» — хибне.

Із практики перевірки істинності виникає ілюзія, ніби кожного разу з розумовими образами можна і треба зіставити «речі такі, якими вони є». Скажімо, я тверджу, що у мене в кишені є авторучка, і порівнення цих слів з дійсністю встановлює, що предмети «я» і «авторучка» насправді «з'єднані». Але перевірка того, чи дерево зелене, зовсім не вимагає «з'єднання» дерева і «зеленості».

Коли в дискусіях навколо поняття «відображення» лунають голоси про необхідність заміни термінів «образ», «відображення» точними термінами з математичної теорії подібності або поняттями «ізоморфізм», «гоморфізм» тощо, то тут, на нашу думку, робиться крок саме не *від*, а *до* наївного матеріалізму. Слова «образ», «відображення» деякою мірою метаморфічні, але вони

не вимагають зіставлення двох рядів об'єктів: «чуттєвих» або «розумових» образів і «речей самих по собі». Але образ не є річ чи об'єкт — він «говорить» про об'єктивну дійсність. «Схожість знань із дійсністю» полягає в тому, що знання говорять про об'єктивну дійсність те, що є насправді, тобто істину. І тільки в цьому розумінні істинне твердження є образом дійсності.

Отже, те, що ми називаємо словом «шум», дійсно є в лісі і тоді, коли його ніхто не чує. Ну, а як у такому разі бути з квантово-механічними об'єктами? Яке справжнє положення електрона, крізь яку із щілин він повинен пройти? Як оцінити те, що квантова теорія не дозволяє ставити подібних питань?

Відповідь на ці питання існує: поняття, вироблені для чуттєво-спостережуваних об'єктів нашого повсякдення, не придатні для виразу властивостей таких об'єктів, як електрон. Слово «вигляд» не має смислу, коли йдеться про об'єкти, яких принципово не можна бачити, тобто які не мають вигляду. Про властивості таких об'єктів відомості дають інші поняття.

Які ж?

Порівнюємо кілька формулювань, де за допомогою різних понять і уявлень наводяться різні характеристики електрона:

1) Електрон — це малесенька частинка, яка має також і хвильові властивості, наприклад, здатність до інтерференції та дифракції.

2) Електрон — це елементарна частинка, яка обертається у просторі, що оточує ядро атома.

3) Електрон — це елементарна частинка з масою 1, зарядом — 1, спіном $1/2$, слідує статистиці Фермі—Дірака.

4) Імпульс і енергія електрона утворюють чотиривимірний вектор.

5) Електрон характеризується рівнянням Шредінгера:

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x, y, z)]\psi = 0.$$

Немає ніякого сумніву, що найточнішою характеристикою поведінки електрона є математична формула — наприклад, рівняння Шредінгера. Але що вона говорить нам про електрон? Перше формулювання дає найбільш наочне уявлення, але саме в цьому і полягає його обмеженість. Може, істину треба шукати десь посередні? Але такі поняття, як «простір», «спін», «імпульс» тощо або будуть пояснені точно в термінах математичних, або перекладені на мову наочності так, що адекватність теоретичного їх змісту різко зменшиться.

Дійсність дана людині тільки один раз: у відповідному розумовому образі. Коли йдеться про науку, то дійсність дана людині тільки один раз — у відповідній теорії. Поза теорією неможливо знайти «дійсний вигляд» об'єктів, для опису яких теорія створювалась. Для того щоб знати, що таке електрон, необхідно і достатньо оволодіти відповідною теорією. Теорією поведінки електрона (квантової системи, ширше кажучи) є квантова механіка. Неможливо створити «філософську теорію електрона» або наочний образ, що замінили б собою теорію: досить зрозуміти теорію.

ЩО ТАКЕ «ЗРОЗУМІТИ»?

Отже, для того, щоб пізнати природу об'єкта, непотрібно зіставляти відповідну теорію з «об'єктом самим по собі»: досить зрозуміти, що говорить відповідна теорія. Але що означає «зрозуміти»?

Зрозуміти — значить мати відповідне поняття. Мати поняття — значить розуміти, не більше. Логіка зовсім

не розкриває нам, що значить «розуміти». Традиційна логіка, правда, містила великі розділи, де багато говорилося про поняття — переважно у напівпсихологічних термінах. Все, що було тут раціонального, використано в сучасній формальній логіці в уявленнях про об'єм поняття: логіка прагне оперувати об'ємами. Але як об'єднуються об'єкти в одну множину, що означає «властивість» — наприклад, такі слова, як «зелений» або «солоний», — це залишається поза сферою розгляду формальної логіки. Тому вона прагне говорити не про поняття, а про терміни, яким приписується певний об'єм.

Це явно виражено в концепції Фреге. Як уже згадувалося, поняття тут ототожнюється з особливою функцією — сингулярною пропозиційною функцією. Об'єм поняття ототожнено з областю визначення змінної. Значенням функції є істина або хіба. Смысл, або поняття — це те, «що можна зрозуміти, коли засвоєно ім'я» (А. Черч). Що саме можна зрозуміти, як розуміють, що таке «зрозуміти» — ці питання виходять за межі логіки. Припускається, що це ясно без додаткових визначень.

А взагалі — чи потрібно визначення в даному випадку: хіба комусь неясно, що означає «я це розумію»?

Можна стати на такий шлях: не лише не роз'яснювати значення виразу «зрозуміти», але й взагалі вважати інтуїтивно зрозумілими фундаментальні поняття теорії, яку ми досліджуємо. Наприклад, для інтуїціоністів немає ніякої потреби зводити до чогось більш простого поняття «натуральне число» — настільки воно всім знайоме. В деяких інтуїціоністських побудовах «інтуїтивно зрозумілими» вважаються і набагато складніші математичні поняття. Але немає ніякої гарантії, що «інтуїтивно зрозуміле» для однієї людини є «інтуїтивно зрозуміле» для іншої. Більше того, нерідкі випадки, коли виявляється, що нам лише здавалося, ніби ми

розуміємо смисл певного виразу. Все начебто було ясно, а потім на практиці ми дізнаємось, що це було лише поверхове уявлення.

Який же критерій можна використати, щоб відрізнити дійсно зрозумілі речі від незрозумілих? Кожен, хто вивчав яку-небудь теорію, знає, коли виявляється поверховість і неповнота знань: тоді, коли їх пробують застосувати на практиці. Ми розуміємо, що означає певний вираз тоді, коли вміємо його вживати. Отже, потрібно сформулювати «правила вживання» настільки точні, щоб можна було користуватись виразом, спираючись лише на ці правила, і тоді можна бути певним, що ми даний вираз правильно розуміємо. Тому часто говорять, що «зрозуміти — значить запам'ятати і навчитися вживати».

Виникають питання: чи можна побудувати правила, що точно визначали б, як потрібно використовувати певні вирази? чи заміняє знання цих правил розуміння смислу виразів?

Інтуїціоністська концепція виходить із того, що всім зрозумілі деякі фундаментальні математичні поняття. Формалістична концепція виходить із того, що зрозумілим є невеличкий мінімум понять, а всі інші вводяться шляхом точних визначень. В обох випадках щось необхідно вважати зрозумілим із самого початку. Неможливо дати визначення всьому. Будь-яка теорія, в тому числі і повністю формалізована (наприклад, логістична система класичного числення речень), будується на якихось підвалинах, первинних поняттях, що їх усі повинні вважати ясними. Через такі невизначувані поняття всередину найбільш строгої теорії проникає «шлейф» інтуїтивних уявлень. Цього ніхто не може заперечувати. Важливо в'яснити, чи приносить «шлейф» користь, чи завдає шкоди.

Почнемо з прикладу, запозиченого з метаматематики. З інтуїціоністської точки зору вираз « n є просте число» настільки зрозумілий, що не потребує ніяких пояснень. А ось приклад «перекладу» виразу « n є просте число» на мову логіки:

« n є член кожного такого класу z , що клас, єдиним членом якого є клас, який не має членів, є членом z , і для кожного члена m класу z клас всіх таких класів, які при виключенні з них одного члена стають належними до m , є член z , і для всіх h і k , які є членами кожного такого класу z , що клас, єдиним членом якого є клас, що не має членів, є член z , і для кожного члена m класу z клас усіх таких класів, які при виключенні з них одного члена стають належними до m ; є член z , якщо для кожного члена x класу n є член y класу h , такий, що всі члени y є членами класу k і ніякі члени y не мають спільних членів, а всі члени членів y , і тільки вони, є члени x , то або h , або k є клас всіх таких класів, які при виключенні з них одного члена стають класами, що не мають членів»¹.

Можна бути певним, що переважна більшість читачів не зрозуміла наведеного визначення, хоча в ньому фігурує запас повністю зрозумілих слів — «членство в класі», «є», «і», «або», «якщо...», «то», «кожен», «всі» тощо. Мабуть, легше було б охопити зміст цього визначення, коли б воно було записане логічними знаками, але й тоді воно було б менш ясне, ніж вираз « n є просте число», дійсно зрозумілий всім. Але зате тут використано лише такі «правила вживання», які викликають мінімум сумнівів.

¹ У. В. Куайн. Основи математики. У зб.: Математика в сучасному світі. М., 1967, стор. 104—105.

Очевидно, справа в тому, що формулювання точних «правил вживання» в даному випадку не переслідує мети пояснити смисл виразу « n є просте число». Мета тут інша: перевірити надійність, несуперечливість відповідних математичних побудов. Інтуїціоністський підхід небезпечніший з цього погляду, оскільки дозволяє надто складні речі проголосити «інтуїтивно ясними»; однак разом з ними до теорії вносяться сумнівні елементи. Щодо смислу таких понять, як «безконечність» або «просте число», то формулювання їх мовою логіки навряд чи можна вважати роз'ясненням.

Учений-практик водночас більшою мірою «формаліст» і більшою мірою «інтуїціоніст», ніж це впливає з будь-якої теорії. Незважаючи на обмеженість формалізації і відсутність універсальних «правил вживання» математичних та інших виразів, фізик-практик схильний до формули «зрозуміти — це значить запам'ятати і навчитися вживати», оскільки теорія вимагає від нього насамперед уміння провести потрібні підрахунки і перевірити їх в експерименті. Саме тому студенти швидко звикають до думки, що в квантовій механіці «нічого особливо розуміти» (згадаймо характеристику Дайсоном засвоєння квантової механіки). З іншого боку, жоден вчений, в тому числі математик, який працює в найабстрактніших галузях, не ставить до своєї теорії як до простої гри символами (на зразок шахів). Математичні вирази в уяві математика сповнені навіть фізичного смислу — принаймні можна твердити, що практично в науковій діяльності математичні вирази використовуються як осмислені з самого початку.

Очевидно, «інтуїціоністська» і «формалістична»¹ від-

¹ Терміни «формалістичний» та «інтуїціоністський» тут взято в лапки, бо йдеться вже про загальну концепцію науки, яка не тільки виходить за рамки суто метаматематичних уявлень, але

повіді на питання: «Що значить зрозуміти смисл теорії?» — ґрунтуються на різних сторонах реального процесу пізнання; кожна достатньо абстрактно характеризує реальний процес «розуміння».

Обидві концепції можна характеризувати приблизно таким чином:

1. Теорія створюється шляхом добору відповідного математичного апарату, який дозволяє робити над знаками і знаковими послідовностями чітко визначені перетворення. Хоча звичайно цим знакам приписується якийсь зміст, він неістотний для наукової теорії. Самі по собі знаки мають чисто «синтаксичне» значення, тобто їх смисл визначається правилами їх вживання. Вихідні формули теорії можна інтерпретувати на спостережуваному фактичному матеріалі, приписуючи їм таким чином певне фізичне значення або фізичний смисл. В результаті перетворень повинні одержуватись формули, яким теж можна приписати фізичний смисл шляхом інтерпретації на спостережуваному матеріалі («емпіричної інтерпретації»). Зрозуміти, що говорить теорія про дійсність — це й значить дати їй емпіричну інтерпретацію.

2. Теорія створюється шляхом добору відповідного математичного апарату, який дозволяє робити над знаками і знаковими послідовностями чітко визначені перетворення. Цим математичним знакам із самого початку приписується певний теоретичний зміст, який визначає суть тверджень про реальність, що її описує тео-

ї далеко не повністю відповідає філософським уявленням творців і захисників згаданих програм. Тому, вживаючи надалі ці вирази в лапках, пам'ятатимемо, що йдеться лише про певну співзвучність охарактеризованої концепції науки до відповідних напрямків у логіці і метаматематиці.

рія. Синтаксичне значення, тобто «правила вживання» їх, може бути визначене лише неповно. Формули теорії можна інтерпретувати на спостережуваному фактичному матеріалі, але найістотніший фізичний зміст теорії формулюється саме тими твердженнями, які не мають безпосередньої емпіричної інтерпретації. Зрозуміти, що говорять теорія про дійсність — це значить передусім зрозуміти смисл саме цих найзагальніших, найабстрактніших положень теорії.

Вже саме формулювання цих концепцій показує, що на ділі тут немає альтернативи «або-або». У юристів є термін «презумпція невинності»: поки вина звинувачуваного не доведена, він вважається невинним. Згадані дві концепції теж ґрунтуються на певних «презумпціях». З першої точки зору слід прийняти «презумпцію неосмисленості» виразів теорії: поки шляхом інтерпретації на емпіричному матеріалі фізичний смисл виразів не встановлено, їх слід вважати неосмисленими. З другої точки зору приймається «презумпція осмисленості» виразів теорії: вважається, що вони наділені фізичним смислом із самого початку.

Логічний аналіз мови науки може показати сфери найдоцільнішого застосування уявлень, що виходить з тієї чи іншої «презумпції». Але абсолютизація кожної із сторін пізнання веде до хибної філософії науки.

ІДЕЯ І ТЕОРІЯ

Невиправданою є надія, ніби теоретичні поняття можна ввести строго формально лише на базі спостережуваних явищ. Кожна теорія починається з використання «інтуїтивно зрозумілих» термінів, і якби не ця обставина, теорія нагадувала б машину, призначену для «перемелювання» чуттєвих даних з однією-єдиною ме-

тою — передбачення практично вагомих наслідків. Але теорія дає можливість і зрозуміти ті процеси і явища, які приховані від людського ока. Поза сферою чуттєво спостережуваного ми виявляємося сліпими, але сліпі тільки наші відчуття, а не розум. Не випадково В. І. Ленін підкреслював, що відчуття людини не можуть досягнути вже швидкості настільки великої, як швидкість світла, а розум може і повинен. У цьому відношенні сучасний матеріалізм, матеріалізм Маркса і Леніна, ближчий до Гегеля, ніж до Епікура. «Чисте мислення», за Гегелем, «пізнає, що виключно воно саме, — а не відчуття чи уявлення, — спроможне оволодіти істиною речей і що тому твердження Епікура: відчуване є істинне, повинне бути розглядуване як цілковите перекинуття природи духа»¹. Звичайно, матеріалізм не може прийняти гегельянське розуміння «чистого мислення».

«Чисте мислення» у природознавстві, як і в логіці та математиці, починається з того, що деякі вироблені тисячолітньою практикою поняття нашої інтуїції беруть за вихідні, але на них накладають певні обмеження. Прикладом може бути характер обмежень, що їх накладає механіка на «інтуїтивне» поняття сили: з невизначеного уявлення про м'язове напруження «вилучаються» в ході розвитку науки антропоморфні риси і тим самим за ним залишається лише той зміст, який сумісний з теоретичним змістом науки, вираженим у «правилах вживання» відповідних понять. Людина — не просто *tabula rasa* («чиста дошка»), як це уявлялось емпіристам, вона не пасивно «відбиває» все, що на ній напише природа, а йде до природи від своїх влас-

¹ Г.-В.-Ф. Гегель. Філософія духа. Соч., т. III, М., 1956, стор. 276.

них суб'єктивних цілей і суб'єктивних уявлень. Лише в процесі такого руху можливе звільнення від суб'єктивності.

З іншого боку, теорія ніколи не будується для об'єктів таких, якими ми бачимо їх у повсякденні або якими вони є «самі по собі». Теорія перетворює світ у математичні точки та інші абстракції і лише згодом «ліпить» із цих абстракцій, як із цеглинок, мислено-конкретне. Зображений таким чином світ значно відрізняється від тієї картини, що її дають нам відчуття разом із інтуїцією. Але теоретична картина світу не менш, а більш істинна, ніж його наочний образ.

Характерно, що ніхто ніколи не закидав класичній механіці те, що вона розглядає замість реальних предметів матеріальні точки та їх сукупності — геометричні місця точок. Але скільки перепадало фізикам, які заявляли, що електрон або квантова система — це математична абстракція, а не реальна річ! Чому ж фізик не зобов'язаний вважати матеріальну точку не абстракцією, а реальною річчю? Адже квантова механіка будується для опису руху квантових систем так само, як класична — для опису руху матеріальних точок та їх сукупностей! А справа в тому, що, говорячи про матеріальні точки, ми завжди маємо на увазі: реальний світ складається не з точок, а з звичайних, даних у відчутті об'єктів, а точки — це лише спосіб представляти їх у теорії. А саме тому, що неясно, які реальні об'єкти репрезентовано електроном або квантовою системою, виникає бажання оголосити саме цю математичну абстракцію реальним об'єктом.

Справді ж ситуація тут в принципі така сама, як і в класичній механіці. «Препарувавши» дійсність відповідним чином, взявши з нашої інтуїції уявлення про річ і мислено «видаливши» з неї весь об'єм, умістивши

масу тіла в «нульовий об'єм», ми одержуємо в теорії абстрактного представника реальних речей, над яким надалі провадимо всі теоретичні побудови. Аналогічні операції робляться над певними уявленнями і при створенні квантової механіки, внаслідок чого ми одержуємо поняття «електрон» — абстрактного представника в нашій свідомості процесів і явищ мікросвіту.

Важливо з'ясувати, які обмеження і на що накладаються. На відміну від класичної механіки, яка реконструює безпосередньо уявлення нашої інтуїції про тіло, квантова механіка вже піддає такій операції уявлення класичної механіки про точку. Правда, робить вона це в умовній формі: «Якщо б ми вважали електрон точкою, то у ньому не було б водночас точного імпульсу і точної координати». У цьому смисл уявлень про квантовий об'єкт як про щось дискретне, а не в тому, що в дійсності електрон є щось подібне до матеріальної точки; він має і імпульс, і координату, тільки ми не можемо їх виміряти.

Теорія відносності вносить уточнення в зміст понять «раніше — пізніше», накладаючи на їх використання обмеження, пов'язані з формалізмами теорії. Але якби певне інтуїтивне розуміння понять «раніше — пізніше», тобто інтуїтивне розуміння поняття «час», не передувало побудові спеціальної теорії відносності, то вона виявилась би чисто формальною схемою. Те ж стосується інтуїтивного змісту поняття «одне й те ж тіло».

Видатний німецький фізик М. Борн, глибокий знавець релятивістської фізики, підкреслював, що якби спеціальна теорія відносності виходила лише з постулату про сталість константи c , то вона була б чисто математичним формалізмом. У дійсності ж ця теорія виходить також із передумови, що одне й те ж тіло (у звичайному, інтуїтивно ясному розумінні слів) залишається

незмінним у різних системах відліку і використовується там для задання одиниць виміру. Саме в цій особливості спеціальної теорії відносності Борн вбачав причину того, що вона набула фундаментально важливої ролі у фізичних поглядах на природу.

«Препарування» одного з понять інтуїції примушує до подальших кроків. Уявивши тіло точкою, ми повинні перетворити час і простір на сукупність «точок простору» і «точок часу», з якими суміщається матеріальна точка в процесі руху. А це в свою чергу вимагає застосування концепції неперервності і до поняття «причина». Єдиною причиною перебування точки в даній момент в даному місці є перебування її в безконечно близькій сусідній момент в безконечно близькому сусідньому місці. Не дивно, що подібна концепція детермінізму відразу ж виявилась непридатною, як тільки було введено поняття про дискретну частинку. Дивно лише, що мало хто шукав причин в обмеженості понять класичної механіки — настільки близькими до «звичного світу» вони здавалися. Насправді ж класична концепція неперервності і класична концепція причинності не менш абстрактні, ніж квантові уявлення.

Пов'язуючи абстракції в єдину систему, теорія реалізує одну ідею, один спільний підхід до описуваного і пояснюваного фрагмента реальності. Ідея визначає, від чого абстрагується вчений при побудові теорії, які додаткові припущення він приймає, якого характеру набувають у теорії звичні уявлення «здорового глузду». У певному розумінні теорія вища за ідею, бо хорошу ідею можна висловити і за чашкою кави, а побудувати теорію, строгий доказ, точну процедуру переходу від одних тверджень до інших можна лише копіткою працею. Але з іншого боку, з іншої точки зору, ідея має достоїнства, яких не має «механізм» теорії. Можна користуватися

теорією, не розуміючи її основної ідеї. Правда, це рано чи пізно виявляється, особливо в критичних ситуаціях, коли теорія «чомусь» перестає відповідати дійсності і вимагає поправок і доповнень, а то і корінного перегляду. Слово «чомусь» взято у лапки, оскільки кожна теорія колись виявляється обмеженою: не може бути теорією, які були б застосовані абсолютно до всіх ситуацій з однаковим успіхом. Саме в кризових ситуаціях виявляється необхідність повернутися до основних ідей теорії, а для цього необхідно їх розуміти. Не випадково полум'яні адепти якоїсь теорії виявляються інколи нездатними на це: вони так міцно засвоїли теорію, так навчилися використовувати її механізм, що нездатні вже повернутися до її основних ідей, нездатні побачити теорію «збоку». В цьому розумінні ідеї можуть пережити своє конкретне втілення у даній теорії.

Сказане вірне, звичайно, лише остільки, оскільки можна розривати ідею та її втілення — теорію. Насправді і те, і інше — різні сторони одного й того ж знання, але все ж різні сторони.

ПОНЯТІЙНИЙ АПАРАТ ТЕОРІЇ

Отже, наукові теорії, зокрема теорії, сформульовані за допомогою математичної мови, виникають не на пустому місці «чистої дошки» людської свідомості. Людина, суспільний суб'єкт активно перебудовує дійсність, йде до неї з усіма своїми власними прагненнями, настановами, передсудами, уявленнями. Абстракції створюються не просто шляхом перебору емпірично встановлених властивостей об'єкта і відкидання «зайвого»: відкинувши «зайве», «несуттєве для розгляду», ми будемо новий об'єкт, теоретичну конструкцію, якій безпосередньо вже не знаходимо аналога в дійсності.

Перевірені тисячоліттями практики уявлення з навколишньої дійсності при цьому використовуються як інтуїтивна основа абстракцій, що надає плоті і крові логіко-математичним «машинам», перетворює їх на живе, функціонуюче ціле.

Тут може виникнути таке питання: а чи не є вся історія людського пізнання перекомбінуванням якихось елементів, наперед заданих в інтуїтивному змісті найзагальніших понять науки? Адже не можна обійтись без понять «раніше — пізніше», «далі — ближче», «тому, що», «необхідно», «випадково» тощо, і скрізь у розумінні цих термінів треба покладатися на інтуїцію. Чи не перекроюємо ми по-різному одне і те ж? Може здатися, що в людському знанні існує така область — область найзагальніших понять, або категорій, яка служить для пояснення всього, сама при цьому не змінюючись. Може здатися, що поняття «енергія», «причина», «простір» тощо мають якийсь абсолютний смисл, незалежно від того, яку експлікацію воїни одержать у майбутньому.

Однак таке припущення неймовірне. Неможливо в наші дні писати про простір і час, не маючи уявлення про теорію відносності, і про причинність — не маючи уявлення про квантову механіку. Але якщо зміст понять «простір», «час» тощо змінюється під впливом розвитку науки, то, можливо, слід говорити про якесь порочне коло, що лежить в основі людських знань?

Порочне коло притаманне знанням, в ході удосконалення яких переглядають їх основи. У цьому розумінні «знання в цілому» містять порочне коло. Але «знання в цілому» — така ж абстракція, як і «актуальна безконечність». Оскільки «знання в цілому» актуально не може бути реалізоване, логічно розглядати його як потенціально безконечний ряд знань, позбавлених порочного

кола, тобто як єдину систему відносно замкнених мов (систем понять).

Коли виявляється, що якась теорія збагачує інтуїцію в цілому, збагачує зміст категорій, то наступна система понять будується на основі більш змістовної інтуїції. Однак всередині конкретної теорії ніякого перегляду інтуїтивного змісту понять не відбувається. Наприклад, уявлення про простір і час, на яких базується теорія відносності, не може змінюватись під впливом тих висновків про властивості простору і часу, котрі зроблені в самій теорії. Побудувавши два-три поверхи, не беруться за перебудову фундаменту.

Всього цього досить, щоб позбавити філософів права на «вічну» метафізику категорій. Не випадково В. І. Ленін вважав теорію пізнання значною мірою емпіричною наукою, основою на аналізі історії мови, науки і техніки.

Порівнюючи різні історичні епохи, ми можемо помітити разючу відміну в загальному стилі мислення, у характері погляду на основні проблеми науки і суспільного життя, у змісті тих основних абстракцій, на яких ґрунтується будова знання, у виборі основних понять і способах виведення похідних понять. Досить порівняти наш час і епоху раціоналізму XVII—XVIII ст. Різниця світоглядів у цьому розумінні (а не в розумінні історії філософії) мало вивчена; на матеріалі історії фізики перебудову категоріальної структури науки прекрасно показав український філософ А. Т. Артюх¹.

Однак якими б значними не були зміни у змісті вихідних понять, здійснювані науковими теоріями, вони все ж залишаються справою порівняно невеликої кількості професіоналів та дилетантів. Набагато значніший

¹ Див. А. Т. Артюх. Категоріальний синтез теорій, К., 1967.

вплив на спосіб мислення епохи справляють суспільні процеси, що змінюють ставлення до таких понять, як свобода, необхідність, індивід, колектив (клас) тощо. Всі ці зміни проникають в найзагальніші уявлення суспільства опосередково, але неминуче.

По мірі того, як ми наближалися у розгляді проблем від точної сфери логіки до безкрайнього моря інтуїції, все менш переконливим і обгрунтованим стає виклад у цій книжці. Справді, як можна досліджувати з дотриманням наукової строгості згадані найзагальніші поняття спеціальних наукових теорій? Що ж, Кант звів усі категорії в таблицю, де їх усього дванадцять; ця таблиця водночас служила класифікацією суджень. Сьогодні Кантові категорії перетворились на логічні оператори і функтори... Після праць Б. Рассела, Е. Гуссерля, К. Айдукевича, С. Лесневського у логіці і лінгвістиці встановилося розуміння категорій як класу таких виразів, у яких можлива заміна одного виразу іншим без позбавлення смислу всього контексту. Очевидно, що теорію доказу також можна розглядати як теорію категорій...

Отже, ми повертаємося до того пункту, з якого почали — до побудови формальних описів категорій нашої інтуїції — тоді, коли виявили необхідність якогось доповнення формального аналізу неформальним.

Щоб розв'язувати свої проблеми науково обгрунтовано, філософія повинна звертатися до таких же методів доказу, як і кожна наука, в тому числі й до формального опису, до операцій симетрії. Але тут виникає загроза перетворення філософії на сукупність формалізмів, які для аналізу своїх побудов вимагатимуть залучення якихось додаткових загальних міркувань.

Виникає така кількість питань, що їх явно не під силу вирішити одній людині. Тут і предмет філософії, і

методи філософського дослідження... Можна було б послатись на дискусії, що точаться з цих приводів на сторінках нашої преси, і на цьому закінчити книжку. Але автор є автор, і коли у нього виявилась можливість, йому хочеться висловитись.

Отже, кілька міркувань з приводу того, як розв'язуються проблеми в різних сферах людської свідомості.

Передусім — про таку сферу суспільної свідомості, як та ідеологія, що не є науковою свідомістю, а лише усвідомленим виразом інтересів певного суспільного класу. Про непролетарську ідеологію Ф. Енгельс писав: «Ідеологія — це процес, що його виконує так званий мислитель, хоч і з свідомістю, але з свідомістю хибною. Дійсні спонукальні сили, які приводять його в рух, лишаються йому невідомими, в противному разі це не було б ідеологічним процесом»¹. Проблеми ідеології — це лише вираз, переформулювання, усвідомлення позаідеологічних проблем, проблем соціального життя. Тому, власне, про «розв'язання» ідеологічних проблем не може йти мови у звичайному розумінні слова. Проблеми, які ставились, наприклад, у дискусії Лютера з папою римським, можна було розв'язати лише силою з тим, щоб потім це «розв'язання» закріпити у формі суспільного усвідомлення результатів і цілей класового конфлікту. Тому, власне кажучи, ненаукова ідеологія не знає розвитку. Вона може лише стандартизуватися, канонізуватися, вона має тенденцію до спрощення, тенденцію, яка викликає непереборні внутрішні труднощі для ідеології. Річ у тім, що ідеологія є основою для різного роду норм — моральних, юридичних тощо, а сукупність норм повинна бути несуперечливою, інакше

¹ К. Маркс, Ф. Енгельс. Вибрані листи. К., 1954, стор. 438.

вона не виконуватиме ролі нормативів. Правда, суспільство інколи обходиться без несуперечливих нормативних систем, оскільки в сумнівних випадках для розв'язання проблем залучаються не норми, а міркування доцільності. Тут якраз і потрібна спрощена, зручна для життя ідеологія типу християнської догматики.

Але оскільки подібна ідеологія не є наукою і всяке слідування з неї є фіктивне слідування, тому активне втручання ідеології в різні сфери життя вимагає суперечливості ідеологічних поглядів, — тоді з них легко впливає все, що завгодно сильним світу цього, правлячим класам та угрупованням. Історія релігійної ідеології є яскравим свідченням цього. Створювана таким чином сукупність уявлень, наочних образів, понять, міфів, передсудів може бути ґрунтом для розвитку літератури, музики тощо (згадаймо роль біблійних сюжетів у розвитку культури!), але це не варто розглядати як розвиток (використання теми демона, Каїна і Авеля, всесвітнього потопу і т. п. поза Біблією не є розвитком Біблії).

Більше ста двадцяти років тому К. Маркс і Ф. Енгельс проголосили кінець ери ненаукової ідеології: новий клас, що вийшов у авангард світової історії — пролетаріат — не потребує ніякої міфології, оскільки він не може керувати суспільним розвитком без наукового усвідомлення свого положення в суспільстві. «Там, де припиняється спекулятивне мислення, — перед лицем дійсного життя, — там саме і починається дійсна позитивна наука, зображення практичної діяльності, практичного процесу розвитку людей»¹. Наука про суспільство водночас є ідеологією революційного робітни-

¹ К. Маркс, Ф. Енгельс. Твори, т. 3, стор. 25.

чого класу, оскільки кінець ідеологічної боротьбі прийде разом з кінцем боротьби класів.

Наука знає дійсний розвиток, дійсне збагачення знань. Що це означає — про те достатньо говорилось вище. Наукові проблеми виникають в рамках кожної теорії і або знаходять там точне розв'язання, або потребують побудови нових теорій для свого вирішення.

Щодо філософії, то вона завжди займала особливу позицію. З одного боку, вона повсякчас була частиною ідеології — і не тому тільки, що у філософію проникали певні ідеологічні настанови антагоністичних класів (свій вияв боротьба соціальних верств може знайти і у творчості математика, якщо він не байдужий до соціальних проблем): філософія осмислювала відношення людини до природи, свідомості до буття, духа до матерії тощо, вона, таким чином, була виявом ставлення людства як цілого до об'єкта людського пізнання і людської діяльності, а тут розуміння «людства як цілого» завжди було пов'язане з розумінням внутрішньої структури людства. З перетворенням на науку ідеологічних уявлень про природу людини відпадає ця ланка, що пов'язує філософію з донауковими уявленнями. Але залишається проблема відношення мислення до буття, людини до навколишнього світу. Це завжди буде усвідомленням власного ставлення до дійсності і буде — якщо не ідеологією, яка зникне лише в безкласовому суспільстві, то, принаймні, — «світорозумінням», «світоглядом» і, може, навіть «світовідчуттям».

Ніяких інших проблем, крім «дух — матерія», «свідомість — буття», філософія не розглядає. Але глибоко помилуються ті, хто вважає їх тривіальними. Проблема «дух — матерія» виникає в різних формулюваннях, і в цьому вся справа. Вище розглядалось одне з формулювань основного, за висловом Ф. Енгельса, питання

філософії: як абстрактні поняття сучасного природознавства відносяться до об'єктивної дійсності, який об'єктивний зміст понять, сформульованих математичною мовою. Оскільки при розв'язанні цього питання ми упираємось у співвідношення інтуїції, що знаходить вираз у «звичайній» мові, і теоретичних конструкцій сучасного природознавства, його можна сформулювати так: які можливості «звичайної» мови в наукових повідомленнях і як зберігається об'єктивність при описі досвіду, що виростає за межі подій нашого повсякденного життя. Саме так ставив питання Н. Бор, і неважко побачити тут формулювання «вічних питань» філософії, специфічне для нашого часу.

Наука — зовсім не єдина і навіть не головна сфера, де виникають подібні проблеми. Досить згадати, що одним із джерел ідей кантівського апіоризму була потреба обґрунтувати незалежність моральних норм від матеріальних, грубих життєвих інтересів індивіда. А хіба не ця ж проблема стоїть за «проклятим питанням» Достоевського: чи варто входити у світлий храм, якщо для цього треба убити немічного старого на його порозі?

Цілі і засоби, норми і доцільність, свобода і необхідність, свобода і відповідальність тощо — всі ці й інші питання постійно виростають із широкої і різноманітної практики. Чи розв'язні вони, ці проблеми? Мабуть, не можна знайти точного їх розв'язання раз назавжди — так, як не можна вирішити «проблему Достоевського» раз назавжди, для всіх ситуацій, і не можна знайти процедуру встановлення зв'язку теоретичних абстракцій із «звичайною» мовою для всіх епох. Філософські проблеми в цьому розумінні «алгоритмічно нерозв'язні», тому вони й «вічні». Але вони мають принципове розв'язання, ґрунтуючись на якому можна, користуючись висловом В. І. Леніна, проводити в

життя одну лінію в філософії. Це принципове розв'язання завжди відділяло і відділяє філософію науки від філософії віри. На долю останньої, явно чи неявно, залишається Тертулліанове «вірю, тому що абсурдно». А філософія науки повинна бути науковою філософією, тобто точно розмежовувати гіпотези і доведені твердження, а докази будувати так; щоб їх можна було перевірити.

Філософією науки, а не філософією віри є матеріалізм, а матеріалізм нашої епохи — матеріалізм Маркса і Леніна — є водночас і науковою філософією. Свої проблеми він розв'язує по-науковому. Оскільки ж філософія — невід'ємна складова частина ідеології і боротьба між матеріалізмом та ідеалізмом є ділянкою всесвітньої боротьби двох ідеологій, то наївно було б думати, що філософи усіх напрямів озброяться логічною технікою, скажуть один одному: «Порахуємо!» і дійдуть до згоди. За ідеологічними конфліктами стоять цілком реальні класові конфлікти, що розв'язуються передусім не в свідомості, а у суспільній дійсності.

Усвідомлюючи свою ідеологічну позицію, філософи-марксистки рішуче відмежовуються від спроб перетворити марксизм з науки на утопію, на сукупність «етичних та політичних ідеалів», властивих ревізіоністам. Органічне поєднання партійності і науковості обов'язкове для кожного марксиста.

Без цих загальних застережень неможливо зрозуміти і місце логічного аналізу в сучасному філософському знанні.

З М І С Т

<i>П. В. Копнін. Логіка науки чи наука логіки? (Замість передмови)</i>	3
Наука шукає надійних фортець	10
Спробуймо собі увявити	10
Чого ми не побачимо	15
Всі надії на математику?	19
«Криза очевидності»	24
На «здоровий глузд» все ж можна покладатися	27
Основні ідеї і методи сучасної формальної логіки	30
Ідея «логічного числення»	31
Числення речень	34
Аксиоматичні побудови числення речень	39
Логістичні системи та їх властивості	42
Числення предикатів	47
Аксиоматична побудова числення предикатів та його властивості	51
Чисті і прикладні числення предикатів	57
Одна логіка чи багато логік?	62
Логіка і безконечність	62
Логіка для безконечного?	69
Універсальність логіки	77
Діалектика і вимога несуперечності	82

Структура мови і структура світу	87
Логічні парадокси та «світові загадки»	87
Ім'я, річ, властивість, відношення у логіці	93
«Номіналістичне» та «реалістичне» розуміння істини	99
Виходячи за межі теоретичної логіки	109
Свобода і необхідність у науковому пізнанні	115
Визначення та конвенції	115
Свобода, вибір, відповідальність, необхідність	120
Об'єктивний зміст операцій симетрії	125
Понятійний апарат наукової теорії	130
Думка як образ дійсності	130
Що таке «зрозуміти»?	134
Ідея і теорія	140
Понятійний апарат теорії	145

Попович Мирослав Владимирович
НАУКА И НАУЧНОЕ ПОЗНАНИЕ
(На українском языке)

Друкується за рішенням Редакційної колегії
науково-популярної літератури АН УРСР

Редактор *А. Г. Леккер*. Оформлення художника *В. З. Куниці*.

Художній редактор *В. П. Кузь*. Технічні редактори *С. Ф. Вербук*,
Г. Р. Боднер. Коректор *А. В. Баранова*.

Здано до набору 27.7.1970 р. Підписано до друку 30.4.1971 р.
БФ 03648. Зам. № 1934. Вид. № 275. Тираж 5000. Папір 1.
70×108¹/₃₂. Друк. фіз. арк. 4,875. Умовн. друк. арк. 6,83.
Обл.-вид. арк. 7,52. Ціна 25 коп.

Видавництво «Наукова думка», Київ-4, Репіна, 3.
Обласна книжкова друкарня Львівського обласного управління
по пресі, Львів, Стефаника, 11.

25 коп.